УДК 330. 43

Заболоцький Т. М.,
кандидат економічних наук, старший науковий співробітник наукової лабораторії Львівського інституту банківської справи Університету банківської справи Національного банку України (м. Київ)

ПЛАНУВАННЯ РИЗИКУ ПРИ ПОРТФЕЛЬНОМУ ІНВЕСТУВАННІ В УКРАЇНСЬКУ ЕКОНОМІКУ

У роботі розглянуто властивості оцінки ризику портфеля цінних паперів з найменшим рівнем VaR. На прикладі акцій українських підприємств показано, що графік умовної густини оцінки VaR є несиметричним щодо математичного сподівання та наявними є важкі хвости. Крім цього, двосторонній інтервал довіри для умовної оцінки VaR є відносно вузьким, в порівнянні з безумовним.
Ключові слова: *міра ризику, Value-at-Risk (VaR), портфель акції з найменшим рівнем VaR, дохідність цінного паперу.*

В работе рассмотрено свойства оценки риска портфеля ценных бумаг с наименьшим уровнем VaR. На примере акций украинских предприятий показано, что график условной плотности оценки VaR является несимметрическим относительно математического ожидания и присутствуют тяжелые хвосты. Кроме того, двусторонний интервал доверия для условной оценки VaR является относительно узким, по сравнению с безусловным.
Ключевые слова: *мера риска, Value-at-Risk (VaR), портфель акций с наименьшим уровнем VaR, доходность акции.*

In the paper the properties of the minimum VaR assets portfolio risk estimator are considered. Using the assets of three Ukrainian firms it is shown that the conditional density plot of portfolio VaR estimator is asymmetric and the heavy tails exist. Moreover the two-sided confidence interval is relatively narrow in comparison with the unconditional one.
Keywords: *risk measure, Value-at-Risk (VaR), minimum VaR asset portfolio, asset return.*

Постановка проблеми. При прийнятті рішення про інвестування в економіку України інвестор стикається з доволі неприємними явищами, які їй притаманні. Це і корумпованість нашої економіки і її олігархізація. Але, незважаючи на ці аспекти, можливість отримання високих прибутків викликає певний інтерес в інвесторів. Одним із чинників такої можливості, який проявляється при аналізі фондового ринку України, є його висока волатильність. Ця властивість ринку має свій як негативний, так і позитивний бік. З одного боку, висока волатильність дає можливість отримати високі прибутки, з іншого – великі збитки. Тому якщо інвестор зважився займатися портфельним інвестуванням на українській фондовій біржі, він повинен дуже уважно підходити до оцінки можливого ризику свого портфеля та зменшити роль очікуваної дохідності при формуванні портфеля. Однією з можливостей побудови портфеля в такій ситуації є мінімізація ризику портфеля без врахування його дохідності. Зрозуміло, що такий підхід не забезпечить стовідсотково прибутковість капіталовкладень. З іншого боку, він дозволить оцінити потенційні втрати та допоможе інвестору прийняти рішення чи варто вкладати свої кошти в такий портфель.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Вперше поняття портфеля цінних паперів з наукового погляду було розглянуто Марковіцем в [1]. Автором роботи запропоновано при побудові портфеля цінних паперів звертати увагу на такі його характеристики, як очікувана дохідність та ризик. За очікувану дохідність прийнято було використовувати математичне сподівання дохідності портфеля, а за ризик – його дисперсію. На основі цих двох характеристик було побудовано декілька оптимальних портфелів. Відзначимо серед них портфель з найменшою дисперсією, який отримав назву портфеля з найменшим ризиком. Відомо, що ваги портфеля, як і його характеристики, залежать від параметрів поведінки цін цінних паперів. На практиці ці параметри є невідомими, тому інвестор у процесі планування характеристик портфеля змушений використовувати їх оцінки, які є випадковими величинами. Тобто значення, які не є константами. Отже, при плануванні поведінки портфеля використовувати тільки точкові оцінки характеристик є неправильно. Достовірніші результати отримуються у випадку використання точкових та інтервальних оцінок, а також властивостей розподілу цих випадкових величин. Для випадку портфеля найменшої дисперсії, ця проблема досліджена в роботах [2]-[4], у яких авторами знайдено густини характеристик цього портфеля при різних початкових припущеннях щодо поведінки дохідності цінних паперів.

Введене Марковіцем поняття ризику викликало хвилю критики серед науковців. По-перше, дисперсія бере до уваги двосторонній ризик, тобто при зростанні імовірності отримання прибутку дисперсія теж зростає. По-друге, інтерпретація дисперсії як ризику не є простою. Тому з часу виходу роботи Марковіца з'явилися інші означення ризику, деякі з яких зовсім не пов'язані між собою. Для спрощення розрахунків було видано низку рекомендаційних програм, таких як, наприклад, *Basel II*, *RiskMetrics*, *CAD II*. Хоча ці програми не дають відповіді на питання, як найкраще оцінити ризик портфеля цінних паперів, в них пропонується використовувати для оцінки ризику міру *Value-at-Risk* (надалі *VaR*) (див., напр., [5]).

VaR залежить від параметра α, який характеризує рівень довіри отриманого значення. На практиці для рівня довіри використовують значення {0. 9, 0. 95, 0. 99, 0. 999}. *VaR* є квантильною мірою, тобто вона дорівнює відповідній α-квантилі розподілу функції втрат або, що еквівалентно, $(1-\alpha)$-квантилі розподілу функції дохідності. Більш точно, *VaR* при рівні довіри α характеризує мінімальний рівень втрат з імовірністю $(1-\alpha)$. З означення *VaR* бачимо, що в порівнянні з дисперсію, інтерпретація ризику є кращою. Крім того, оскільки *VaR* є квантильною мірою, вона враховує тільки ризик втрат, а не двосторонній ризик. Також, у порівнянні з іншими мірами ризику, такими як, наприклад, умовне *VaR* чи β, обчислення її значень є набагато простішим. Питання побудови портфеля з найменшим рівнем *VaR* вперше розглянуто в [6]. Автори цієї праці, припускаючи, що дохідності цінних паперів поводяться як нормально розподілені випадкові величини, знайшли ваги портфеля з найменшим рівнем *VaR* та його характеристики. Виявляється, що як і у випадку портфеля з найменшою дисперсією, ваги та характеристики портфеля залежать від параметрів розподілу дохідностей, які на практиці невідомі. Тому інвестор при плануванні характеристик цього портфеля змушений також оперувати їх оцінками, які є випадковими величинами. Оцінки характеристик портфеля з найменшим рівнем *VaR* досліджено в [7]-[8]. Так, наприклад, у роботі [7] показано, що використовувати при плануванні безумовні характеристики портфеля з найменшим рівнем *VaR* неправильно, для отримання надійніших результатів потрібно віддавати перевагу умовним характеристикам. У [8] знайдено густини розподілів умовних характеристик портфеля.

Мета і завдання дослідження. Метою цієї роботи є дослідження оптимального портфеля акцій з найменшим рівнем *VaR* та порівняння умовних і безумовних властивостей оцінки його *VaR*. Зауважимо також, що точкові оцінки характеристик не містять у собі достовірної інформації, оскільки імовірність прийняття випадкової величиною значення точкової оцінки дорівнює нулю. Тому при плануванні своєї діяльності на основі портфеля цінних паперів інвесторові краще використовувати не лише точкові, але й інтервальні оцінки параметрів, що його цікавлять. Побудова таких умовних інтервальних оцінок також є метою даної роботи.

Виклад основного матеріалу. Виберемо за характеристику цінного паперу його логарифмічну дохідність (далі дохідність). Позначимо P_t – ціна цінного паперу в момент часу *t*, тоді дохідність цінного паперу в цей момент часу визначаємо як:

$$X_t = 100\ln\frac{P_t}{P_{t-1}}.$$

На відміну від ціни дохідність цінного паперу має привабливіші статистичні властивості. Так, наприклад, значення, які може приймати дохідність, є необмежені ні зверху, ні знизу, чого не можна сказати про ціну, яка завжди додатна. Також, дохідність не має часового тренду та її значення є розсіяними навколо нуля. Ціна має тренд, причому він з часом змінює свій напрямок. Зазначимо, що ціна цінного паперу не є симетрично розподіленою щодо певного значення та її поведінці не притаманна властивість слабкої стаціонарності. Зважаючи на недоліки статистичних властивостей ціни, у працях з фінансової математики частіше для розрахунків використовують дохідність.

Відомо, що дохідності цінних паперів поводяться як випадкові величини. Тому наперед передбачити їх значення в загальному випадку неможливо. Для цього слід звертати увагу на характеристики розподілу дохідності. Найчастіше використовують такі характеристики, як математичне сподівання та дисперсію. При портфельному інвестуванні інвестор стикається з проблемою прогнозування та аналізу багатовимірної випадкової величини. З погляду інвестора, важливими характеристиками портфеля є дохідність та ризик. У цьому досліджені за міру ризику вибрано *VaR* при рівні довіри α. Вперше задачу мінімізації *VaR* портфеля розглянуто в [6], де припускається, що дохідності цінних паперів поводяться як нормально розподілені випадкові величини. Позначимо через $\mathbf{X}_t=(X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{kt})'$ k-вимірний вектор дохідностей. Тут k – кількість цінних паперів, з яких ми формуємо портфель. Вектор $w=(w_1, w_2, \ldots, w_k)$ назвемо вагами портфеля цінних паперів, де w_i – частка i-го цінного паперу в портфелі. Нехай $\mathbf{X}_t$ є k-вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами μ та Σ. Дохідність портфеля X_{wt} з вектором ваг w обчислюємо за формулою $X_{wt}=\sum_{i=1}^{t} X_{it} w_i = \mathbf{X}_t'\mathbf{w}$ математичне сподівання R_w дохідності портфеля або очікувану дохідність – $R_w=E(X_{wt})=\mu' w$, а дисперсію $V_w= D(X_{wt})=w'\Sigma w$. У випадку нормально розподілених дохідностей *VaR* портфеля з рівнем довіри α можемо обчислити таким чином $VaR_\alpha(w) = z_\alpha V_w - R_w$. Задача мінімізації ризику портфеля, розглянута в [6], має вигляд

$$\begin{cases} VaR_\alpha(w) \to \min \\ \sum_{i=1}^{k} w_i = 1. \end{cases} \qquad (1)$$

Розв’язком (1) є вектор ваг оптимального портфеля з найменшим рівнем *VaR*:

$$\mathbf{w}_{VaR} = \mathbf{w}_{GMV} + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}}\mathbf{R\mu}, \qquad (2)$$

де $\mathbf{w}_{GMV} = \dfrac{\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}}{\mathbf{i}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}}$ – ваги оптимального портфеля з найменшою дисперсією,

$V_{GMV} = \dfrac{1}{\mathbf{i}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}}$ – дисперсія портфеля w_{GMV}, i – k вимірний вектор, елементами якого є одиниці,

$$\mathbf{R} = \mathbf{\Sigma}^{-1} - \frac{\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}\mathbf{i}'\mathbf{\Sigma}^{-1}}{\mathbf{i}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}},$$

$s = \mu' R\mu$, та $z_\alpha = -\Phi 1(1-\alpha)$ є α-квантилю стандартного нормального розподілу. Безумовні характеристики цього портфеля, які найчастіше використовуються при плануванні діяльності інвестором, мають такий вигляд:

$$R_{VaR} = \mathbf{w}'_{VaR}\,\boldsymbol{\mu} = R_{GMV} + \frac{s}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}}\sqrt{V_{GMV}}, \qquad (3)$$

$$V_{VaR} = \mathbf{w}'_{VaR}\,\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}_{VaR} = \frac{z_\alpha^2}{z_\alpha^2 - s}V_{GMV}, \qquad (4)$$

$$M_{VaR} = \sqrt{z_\alpha^2 - s}\sqrt{V_{GMV}} - R_{GMV}, \qquad (5)$$

де $R_{GMV} = \dfrac{\boldsymbol{\mu}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}}{\mathbf{i}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{i}}$ – очікувана дохідність портфеля w_{GMV},

R_{VaR} – очікувана дохідність портфеля w_{VaR}, V_{VaR} – його дисперсія, а M_{VaR} – VaR цього портфеля при рівні довіри α.

Характеристики (2)-(5) залежать від параметрів розподілу дохідностей цінних паперів μ та Σ. Ці параметри на практиці є невідомими. Тому для планування своєї діяльності інвестору необхідно використовувати оцінки цих параметрів. Нехай відомою є вибірка історичних значень дохідності X_1, X_2, …, X_n. Тоді на практиці найчастіше використовують історичні оцінки параметрів

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{X}_i, \quad \hat{\mathbf{\Sigma}} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})'. \qquad (6)$$

Підставляючи оцінки (6) у вирази (2)-(5), отримують оцінки ваг та характеристик портфеля з найменшим рівнем VaR. Зауважимо, що у виразі (2) знаменник другого доданку є визначеним лише при умові, що $z^2_\alpha > s$. Параметр $s = \mu' R\mu$ є невідомим на практиці. Тому ми змушені використовувати його оцінку $\hat{s} = \hat{\boldsymbol{\mu}}'\hat{\mathbf{R}}\hat{\boldsymbol{\mu}}$. Залежно від властивостей цієї оцінки, яка є випадковою величиною, вираз під коренем може бути від'ємним. У роботі [7] знайдено розподіл оцінки цього параметра та досліджено її властивості. На основі знайденого розподілу в [7] побудовано інтервал довіри для імовірності того, що $z_\alpha^2 > \hat{s}$. Виявляється, що імовірність такої події є меншою за одиницю. Тому для отримання коректних результатів неправильно використовувати безумовні характеристики портфеля. Натомість, при плануванні інвестиційної діяльності, потрібно враховувати умову $z_\alpha^2 > \hat{s}$, тобто використовувати при розрахунках умовні оцінки.

Крім цього, зазначимо, що оцінки параметрів розподілу, а також і оцінки ваг та характеристик портфеля, є випадковими величинами. Тому точкові оцінки в цьому випадку не є достовірними. Коректніше при плануванні діяльності використовувати інтервальні оцінки. Для цього необхідно знати розподіл характеристики, яка оцінюється. В нашому випадку, умовний розподіл оцінки $\hat{M}_{VaR}$ за виконання умови $\hat{s} < z_\alpha^2$.

Розподіл величини $\hat{M}_{VaR} \mid \hat{s} < z_\alpha^2$ знайдено в роботі [8]. Густина розподілу цієї випадкової величини має вигляд:

$$f_{\hat{M}_{VaR}\mid \hat{s}<z_\alpha^2}(x) = K(z_\alpha^2)\int_0^{z_\alpha^2} f_{k-1,n-k+1;ns}\left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)}s^*\right) f_{\hat{M}^*_{VaR}}(x \mid s^*)\,ds^*, \qquad (7)$$

де $K(x) = \dfrac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)}\dfrac{1}{F_{k-1,n-k+1;ns}\left(\dfrac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)}x\right)}$, $F_{d1,d2\lambda}(x)$ та $f_{d1,d2\lambda}(x)$ відповідно функція розподілу та густина нецентрального розподілу Фішера з d_1 і d_2 ступенями свободи та нецентральним параметром λ, а

$$f_{\hat{M}^*_{VaR}}(x \mid s^*) = \frac{1}{2^{\frac{n-k-2}{2}} c(s^*)^{n-k} \Gamma((n-k)/2)} \exp\left\{-\frac{(x+R_{GMV})^2}{2(c(s^*)^2 + \tilde{s}^*)}\right\} \times$$
$$\times M(x; n-k, -R_{GMV}, -\sqrt{\tilde{s}^*}, c(s^*))$$

є функцією густини оцінки M_{VaR} за умови, що значення ŝ наперед відоме та становить s^*. Тут

$$M(x; m, a, b_1, b_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|b_1|} \int_0^\infty t^{m-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{b_2^2}\right)\left(t - (x-a)\frac{b_2^2}{b_2^2 + b_1^2}\right)^2\right\} dt,$$

$$c(s^*) = \sqrt{(z_\alpha^2 - s^*)\frac{V_{GMV}}{n-1}} \text{ та } \tilde{s}^* = \frac{1 + n/(n-1)s^*}{n} V_{GMV}.$$

Враховуючи попередній результат, точковою умовною оцінкою M_{VaR} при рівні довіри α є математичне сподівання

$$M(\hat{M}_{VaR} \mid \hat{s} < z_\alpha^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\hat{M}_{VaR}|\hat{s}<z_\alpha^2}(x)dx = -R_{GMV} + \sqrt{\frac{2V_{GMV}}{n-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right)} Q_3(z_\alpha^2),$$

де $Q_3(x) = K(x)\int_0^x \sqrt{x - s^*} f_{k-1,n-k+1;ns}\left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} s^*\right) ds^*$.

Для того, щоб оцінити достовірність так побудованої точкової оцінки, обчислимо умовну дисперсію випадкової величини $\hat{M}_{VaR} \mid \hat{s} < z_\alpha^2$

$$D(\hat{M}_{VaR} \mid \hat{s} < z_\alpha^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{\hat{M}_{VaR}|\hat{s}<z_\alpha^2}(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\hat{M}_{VaR}|\hat{s}<z_\alpha^2}(x)dx\right)^2.$$

Зрозуміло, що чим меншою є дисперсія, тим достовірнішою буде оцінка. Зазначимо, що при наявній волатильності українського фондового ринку, було б дуже дивно отримати в цьому випадку невисоке значення для дисперсії. Тому для планування діяльності використовувати лише точкову оцінку некоректно. В такому випадку разом з точковими оцінками потрібно використовувати інтервальні оцінки, які ми отримуємо так:

$$\int_{y_1}^{y_2} f_{\hat{M}_{VaR}|\hat{s}<z_\alpha^2}(x)dx = \beta, \tag{8}$$

де β є потрібним рівнем довіри. Зрозуміло, що без накладання додаткових умов на значення y_1 та y_2 розв'язок рівняння не є єдиним. Тому ми розглянемо дві інтервальних оцінки. Одна з них двостороння, а інша одностороння. Зазначимо, що в цьому випадку важливішою для інвестора в розумінні інформативності є одностороння інтервальна оцінка, оскільки нижня межа у випадку оцінки ризику не несе в собі важливої інформації. Двосторонню оцінку отримуємо з системи рівнянь

$$\int_{-\infty}^{y_1} f_{\hat{M}_{VaR}|\hat{s}<z_\alpha^2}(x)dx = (1-\beta)/2, \quad \int_{y_2}^{+\infty} f_{\hat{M}_{VaR}|\hat{s}<z_\alpha^2}(x)dx = (1-\beta)/2. \tag{9}$$

Система рівнянь (9) має єдиний розв'язок, який і буде двостороннім інтервалом довіри з рівнем довіри β для оцінки *VaR* портфеля. Односторонній інтервал довіри отримуємо з

$$y_1 = -\infty, \quad \int_{-\infty}^{y_2} f_{\hat{M}_{VaR}|\hat{s}<z_\alpha^2}(x)dx = \beta. \tag{10}$$

Розв'язати рівняння (9) чи (10) аналітичними методами неможливо. Тому в наступному розділі ми будемо використовувати програми Mathematica та R.

Для проведення аналізу безумовних та умовних оцінок ризику портфеля цінних паперів з найменшим рівнем *VaR* виберемо акції енергетичного сектора України, а саме акції компаній Центренерго, Дніпроенерго, Західенерго. Часовий інтервал виберемо з 01. 12. 2008 до 01. 12. 2011 р. Враховуючи припущення про нормальний розподіл дохідностей цінних паперів, будемо розглядати лише щомісячні дохідності вибраних нами акцій, загалом 36 спостережень.

Перш за все протестуємо на нормальність розподілу вибірки історичних значень. Результати проведенних тестів відображено в таблиці 1. З результатів, які подані в таблиці, бачимо, що при рівнях значущості менших за 0. 1 ми не можемо відхилити гіпотезу про те, що наші вибірки є вибірками з нормального розподілу.

Таблиця 1

p-значення критерія Колмогорова для щомісячних дохідностей акцій вибраних підприємств

	p-значення Колмогорова
Центренерго	0. 3984
Дніпроенерго	0. 5135
Західенерго	0. 4973

Тобто припущення про нормальний розподіл щомісячних дохідностей вибраних акцій коректне. Оцінки параметрів розподілу дохідностей є такими:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = (1.2801, 0.7849, -0.8343)', \qquad \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \begin{pmatrix} 322.5649 & 219.5584 & 199.6783 \\ 219.5584 & 285.4501 & 185.7048 \\ 199.6783 & 185.7048 & 237.2131 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Наше припущення про високу волатильність українського ринку повністю підтвердилося. Крім того, дохідності акцій Центренерго та Дніпроенерго є досить високими в порівнянні з дохідностями акцій у розвинених країнах. Акції Західенерго включено в портфель з огляду на його недавній продаж у приватну власність та сподіваннями на те, що ціни акцій в зв'язку з цим зростуть. Крім цього, акціям цієї компанії притаманна найнижча волатильність серед вибраних нами компаній.

На основі оцінок (11) обчислимо характеристики портфеля з найменшим рівнем *VaR* при рівні довіри $\alpha = 0.95$, використовуючи (2)-(5),

$$\hat{\mathbf{w}}_{VaR} = (0.2009001, 0.3427387, 0.4563612)', \ \hat{R}_{VaR} = 0.145445, \ \hat{V}_{VaR} = 220.8974, \ \hat{M}_{VaR} = 24.22925$$

Так, побудований нами портфель має невисоку дохідність за рахунок високої частки акцій Західенерго в портфелі, що, своєю чергою, зумовлено нижчою волатильністю цих акцій в порівнянні з іншими акціями в портфелі. Також варто відзначити високі значення дисперсії портфеля та його *VaR*, що не дивно, зважаючи на високу волатильність нашого фондового ринку взагалі.

Для дослідження умовної густини розподілу оцінки *VaR* портфеля спочатку необхідно обчислити оцінки невідомих параметрів, що входять у (7)

$$\hat{R}_{GMV} = -0.141998, \ \hat{V}_{GMV} = 218.2924, \ \hat{s} = 0.0317176. \quad (12)$$

Підставляючи оцінки (12) у вираз умовної густини (7), побудуємо її графік.

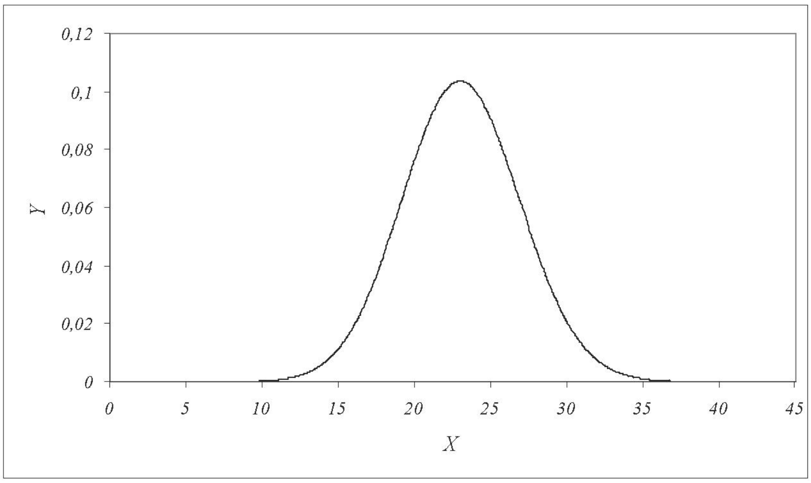

Рис. 1. Графік густини випадкової величини

За умовну точкову оцінку *VaR* портфеля візьмемо умовне математичне сподівання

$$M(\hat{M}_{VaR} \mid \hat{s} < z_\alpha^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\hat{M}_{VaR} \mid \hat{s} < z_\alpha^2}(x) dx = 23.07039$$

Порівняно з безумовною оцінкою *VaR* портфеля, умовна приймає значення менше, що робить портфель, хоч і незначно, проте менш ризиковим. Зауважимо, що і умовна оцінка *VaR* портфеля, так само як і безумовна, не є достовірною, оскільки:

$$D(\hat{M}_{VaR} \mid \hat{s} < z_\alpha^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{\hat{M}_{VaR}|\hat{s}<z_\alpha^2}(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\hat{M}_{VaR}|\hat{s}<z_\alpha^2}(x)dx\right)^2 = 14.61027$$

Хоча умовна густина розподілу оцінки *VaR* портфеля є майже симетричною (рис. 1), максимум досягається в точці x_0=22. 99015, отже, будувати інтервал довіри, використовуючи властивості дисперсії, не можна, оскільки густина не є симетричною щодо точки x_0. Тому для побудови інтервалів довіри потрібно використовувати формули (8)-(10).

Межі двостороннього інтервалу з рівнем довіри $\beta = 0.95$ будуть розв’язками таких інтегральних рівнянь:

$$\int_{-\infty}^{y_1} f_{\hat{M}_{VaR}|\hat{s}<z_\alpha^2}(x)dx = 0.025, \quad \int_{y_2}^{+\infty} f_{\hat{M}_{VaR}|\hat{s}<z_\alpha^2}(x)dx = 0.025.$$

Для розв’язку цих інтегральних рівнянь використаємо метод золотого перерізу. Точність обчислень задамо похибкою 0. 000001, отримаємо

[15. 584297,30. 820313]

Зауважимо, що побудований інтервал довіри підтверджує наше попереднє спостереження про неможливість використання властивостей дисперсії для його побудови. Так, побудований інтервал є несиметричним щодо умовної оцінки ризику, що дозволяє інвесторові точніше оцінити майбутню поведінку ризику.

Для одностороннього інтервалу довіри нам потрібно розв’язати інтегральне рівняння:

$$\int_{-\infty}^{y_2} f_{\hat{M}_{VaR}|\hat{s}<z_\alpha^2}(x)dx = 0.95.$$

У цьому випадку також використаємо метод золотого перерізу та похибку на рівні 0. 000001. Розв’язавши це рівняння, отримаємо

$$(-\infty,\ 29.490476].$$

Оскільки при плануванні ризику інвестор не зацікавлений у нижній межі інтервалу довіри, то для передбачення майбутніх втрат коректніше використовувати односторонній інтервал довіри.

Висновки. Дана робота присвячена порівнянню безумовних та умовних характеристик портфеля цінних паперів з найменшим рівнем *VaR*. Оскільки ваги портфеля, а отже, і його характеристики, є коректно визначеним лише за виконання умови, то нехтувати цією умовою при плануванні ризику такого портфеля неправильно. В такому випадку безумовні характеристики портфеля не надають повної інформації про портфель. Натомість при здійснені портфельного інвестування інвестору краще опиратися на умовні властивості характеристик портфеля.

У статті розглянуто властивості умовної оцінки *VaR* портфеля. Показано, що умовна густина оцінки *VaR* не є симетричною щодо математичного сподівання. Також дисперсія оцінки є досить високою, наслідком чого є те, що умовна точкова оцінка *VaR* портфеля є недостовірною. Зазначимо, що ця оцінка відрізняється від безумовної. Крім цього, двосторонній інтервал довіри для умовної оцінки *VaR* є несиметричним щодо умовної оцінки ризику. Завдяки цьому планувати ризик свого портфеля інвестор може більш точно, що, своєю чергою, знижує імовірність отримати незаплановані втрати.

Література:

1. Markowitz H. Portfolio selection / H. Markowitz // Journal of finance. – 1952. – № 7. – P. 77-91.
2. Okhrin Y. Distributional properties of optimal portfolio weights / Y. Okhrin, W. Schmid // Journal of Econometrics. – 2006. – № 134. – P. 235-256.
3. Bodnar T. Statistical inference of the efficient frontier for dependent asset returns / T. Bodnar, W. Schmid, T. Zabolotskyy // Statistical Papers. – 2009. – № 50. – P. 593-604.
4. Bodnar T. Sample efficient frontier in multivariate conditionally heteroscedastic elliptical models / T. Bodnar, T. Zabolotskyy // Statistics. – 2010. – V. 44, Issue 1. – P. 1-15.
5. Basel Committee on Banking Supervision // Operational Risk Consultative Document, Supporting document to the New Basel Capital Accord. – January 2001. – 30 p.
6. Alexander G. J. Economic implication of using a mean-VaR model for portfolio selection: a comparison with mean-variance analysis / G. J. Alexander, M. A. Baptista // Journal of economic dynamics & control. – 2002. – № 26. – P. 1159-1193.
7. Заболоцький Т. М. Оцінка ваг валютного портфелю з найменшим рівнем VaR / Т. М. Заболоцький // Вісник НБУ. – 2011. – № 8. – С. 31-33.
8. Заболоцький Т. М. Розподіл характеристик портфеля акцій з найменшим рівнем VaR / Т. М. Заболоцький // Моделювання та інформаційні системи в економіці. – 2011. – № 85. – С. 165-178.