



Отримано: 03 квітня 2019 р.

Прорецензовано: 15 квітня 2019 р.

Прийнято до друку: 26 квітня 2019 р.

e-mail: prommet@ukr.net

DOI: 10.25264/2311-5149-2019-13(41)-88-97

Вітлінський В. В., Катуніна О. С. Моделювання динамічних факторних систем макроекономічних показників деяких країн. *Наукові записки Національного університету «Острозька академія». Серія «Економіка»* : науковий журнал. Острог : Вид-во НаУОА, червень 2019. № 13(41). С. 88–97.

УДК 332.62(477.7):339.9

JEL Classification: D60, E52, E65

**Вітлінський Вальдемар Володимирович,**

доктор економічних наук, професор, професор кафедри економіко-математичного моделювання Інституту інформаційних технологій в економіці ДВНЗ «Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана»

**Катуніна Ольга Сергіївна,**

кандидат економічних наук, доцент, доцент кафедри економіко-математичного моделювання Інституту інформаційних технологій в економіці ДВНЗ «Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана»

## МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ФАКТОРНИХ СИСТЕМ МАКРОЕКОНОМІЧНИХ ПОКАЗНИКІВ ДЕЯКИХ КРАЇН

У роботі розглянуто динаміку систем макроекономічних показників для окремих країн Західної Європи та деяких пострадянських країн, побудовано відповідні динамічні факторні моделі. Для моделювання таких систем із метою визначення прогнозних значень окремих часових рядів застосовано динамічний факторний аналіз, який дозволяє мінімізувати похибку обраного показника в *ex post* прогнозі. На конкретних прикладах показано вплив параметрів розроблених моделей, як-от, склад системи, кількість факторів і довжини лага в авторегресійних рівняннях на якість опису динамічної зміни показників і визначення відповідних прогнозних значень. Для розглянутих систем розраховано інтервальні й рекурсивні прогнози обраних показників. Порівняно здобуті результати прогнозування з фактичними даними статистики й встановлено, що похибка прогнозу не перевищує 5%.

**Ключові слова:** макроекономіка, часові ряди, динамічні економічні системи, динамічний факторний аналіз, прогнозування.

**Витлинский Вальдемар Владимирович**

доктор экономических наук, профессор, профессор кафедры экономико-математического моделирования Института информационных технологий в экономике ГВУЗ «Киевский национальный экономический университет имени Вадима Гетьмана»

**Катунина Ольга Сергеевна,**

кандидат экономических наук, доцент, доцент кафедры экономико-математического моделирования Института информационных технологий в экономике ГВУЗ «Киевский национальный экономический университет имени Вадима Гетьмана»

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ФАКТОРНЫХ СИСТЕМ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НЕКОТОРЫХ СТРАН

В работе рассмотрена динамика систем макроэкономических показателей, и для отдельных стран Европы и постсоветских стран, построены соответствующие динамические факторные модели. Для моделирования таких систем с целью определения прогнозных значений отдельных временных рядов использован динамический факторный анализ, который позволяет минимизировать ошибку выбранного показателя в *ex post* прогнозе. На конкретных примерах показано влияние параметров моделей, таких как состав системы, количество факторов и длина лага в авторегрессионных уравнениях на качество описания динамического изменения показателей и определения соответствующих значений получаемых прогнозов. Для рассмотренных систем установлены интервальные и рекурсивные прогнозы выбранных временных рядов. Выполнено сравнение полученных результатов прогнозирования с фактическими данными статистики и установлено, что ошибка прогноза не превышает 5%.

**Ключевые слова:** макроэкономика, временные ряды, динамические экономические системы, динамический факторный анализ, прогнозирование

**Valdemar Vitlinskyi,**

Doctor of Economics, Professor, Professor of the Department of Economic and Mathematical Modeling of the Institute of Information Technologies in Economics, Vadim Getman Kyiv National Economic University

**Olga Katunina,**

Ph.D., associate professor, Associate Professor at the Department of Economic and Mathematical Modeling of the Institute of Information Technologies in Economics, Vadim Getman Kyiv National Economic University



## MODELING OF DYNAMIC FACTOR SYSTEMS OF MACROECONOMIC INDICATORS OF SOME COUNTRIES

The paper examines the dynamics of macroeconomic indicators and the corresponding dynamics factor models for some European countries are constructed. The considered time series describe the evolution of the economy of the former Soviet republics of Latvia, Lithuania, Estonia, Belarus and Ukraine, as well as of Hungary and Finland, since 1998. The composition of dynamic systems included such macroeconomic indicators as GDP, GDP at PPP, exports, imports and total external debt. To substantiate the results, the article contains an extensive graphically-tabular material.

For modeling such systems for the purpose finding of the predicted values of a specific time series the original version of the dynamic factor analysis had been used. In the developed version of this method there is a possibility to minimize the error of the selected indicator in the ex post forecast

As a result, a multi-valued prediction arises, showing several ways in which a dynamic economic system can be developed. Therefore, to go to the next step in the recursive forecast, the arithmetic average of the obtained forecasts of each indicator is used. Specific examples show the influence of model parameters such as the composition of the system, the number of factors and the length of the lag in the autoregressive equations on dynamical changes of the models and on corresponding prognos values.

Interval and recursive forecasts of selected time series are established for the considered system. Calculations showed that the constructed three-factor models for four and five indicators describe the dynamic systems in different ways. In the considered time periods the best description of the dynamics of the initial time series was obtained in models with four indicators after the exclusion of external debt from them.

Comparison of the obtained prognoses results with the actual statistical data is carried on and it is established that the forecast error does not exceed 5%. This confirms the effectiveness of the developed version of the dynamic factor analysis and the possibility of its use in the analysis of various economic systems.

**Key words:** macroeconomics, time series, dynamic economic systems, dynamic factor analysis, forecasting.

**Вступ.** Макроекономічні процеси зазвичай досліджують на основі побудови певних макроекономічних моделей, які формалізують реальні економічні процеси і явища. У загальному випадку таке спрощене й ідеалізоване відображення дійсності повинно визначати основні закономірності розвитку економічних процесів. Це досягають установленням зв'язків між макроекономічними показниками, що зазвичай задаються панельними даними, які містять синхронні результати спостережень по різних країнах або галузях економіки окремої країни, поданих у вигляді часових рядів (ЧР).

У цій статті розглянуто динаміку системи макроекономічних показників, які відображають зміни в економіці деяких країн Західної Європи впродовж останніх 20 років. Для дослідження обрано групу пострадянських республік, як-от: Латвія, Литва, Естонія, Білорусь, Україна, постсоціалістична Угорщина і капіталістична Фінляндія. Зауважимо, що країни Прибалтики, Угорщина і Фінляндія є членами ЄС, але, крім Фінляндії, вони були прийняті до ЄС тільки після розпаду Радянського Союзу. Тоді ж на самостійний шлях розвитку стали Білорусь і Україна. Крім того, на вибір саме цих країн вплинуло те, що Фінляндія, як і країни Прибалтики, входить до Ради держав Балтійського моря, а Угорщина і Білорусь є безпосередніми сусідами України.

Серед макроекономічних показників розрізняють абсолютні та відносні. Для аналізу обрано 5 із 10 макропоказників, наведених на сайті світової економіки egerport.ru [1] (до 2016 року), і дані з довідника CIA World Factbook [2] (2016, 2017 pp.). Зокрема, розглянуто такі абсолютні показники, як номінальний ВВП, ВВП по ППС (паритету купівельної спроможності), обсяги експорту й імпорту, а також загальний зовнішній борг. Показники, що визначають темпи зростання, на нашу думку, потрібно аналізувати окремо. На час написання статті статистичні дані були обмежені 2018 роком.

**Постановка проблеми.** Залежно від того, як зміну показників у часі враховано в економічному аналізі, розрізняють три класи макроекономічних моделей: статичні, порівняльної статистики й динамічні. Статичні моделі описують економічну ситуацію на певний момент часу. Моделі порівняльної статистики показують результат переходу економічної системи з одного стану в інший, тобто просто фіксують цей перехід. Механізми перехідного процесу потрібно розглядати в динаміці, і широкі можливості в цьому напрямку надають динамічні факторні моделі (ДФМ).

Головна перевага використання ДФМ полягає в тому, що деякі економічні зміни виявляються загальними для всієї сукупності економічних показників, розглянутих у моделі, а інші – ідіосинкратичними. Динаміка досить великої групи спостережуваних змінних буде залежати лише від небагатьох неспостережуваних змінних – факторів. У цьому сенсі ДФМ перетинається з ідеологією традиційного факторного аналізу (ФА), який широко використовують в економіці та фінансах у ситуаціях, коли можна припустити, що відносно велику кількість змінних зумовлюють кілька загальних чинників їх зміни [3]. Це означає, що дані спостережень  $n$  змінних, відображених у певній статистичній моделі, замінюють іншою моделлю, у якій кожна нова спостережувана змінна – це лінійна функція  $k < n$  неспостережуваних змінних або факторів та залишкового складника  $e_t$ , що визначає похибку, тобто



$$y_t = A\eta_t + e_t, \quad t = 0, 1, 2, \dots, T, \quad (1)$$

де  $y_t, e_t$  – це  $n \times 1$  вектори-стовпчики,  $A$  – прямокутна  $n \times k$  матриця, і  $\eta_t$  вектор-стовпчик  $k \times 1$ ,  $t$  – час,  $T$  – період спостережень.

Урахування динаміки в моделі (1) полягає в припущенні, що реалізацію загальних факторів в обраному періоді часу можна отримати, використовуючи спостережувані змінні за декілька попередніх періодів. Іншими словами, як це зроблено в [4], можливо прийняти факторну модель із розподілим лагом

$$y_t = A(L)\eta_t + e_t, \quad t = 0, 1, 2, \dots, T, \quad (2)$$

де  $A(L)$  – поліноміальна матриця лагових операторів, тобто  $A(L) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l L^l$ , а фактори  $\eta_t$  і похибка  $e_t$  генеруються стаціонарним випадковим процесом.

У цитованій роботі [4] додатково зазначено, що  $A(L)$  є лагом зі степеневим розподілом:  $A_l = A\Phi^l$ , де  $(k \times k)$  матриця із власними значеннями за модулем, меншими від одиниці, а тому

$$y_t = A \sum_{l=0}^{\infty} \Phi^l \eta_{t-l} + e_t, \quad t = 0, 1, 2, \dots, T, \quad (3)$$

що еквівалентно

$$y_t = A\mu_t + e_t, \quad t = 0, 1, 2, \dots, T, \quad (4)$$

$$\mu_t = \Phi\mu_{t-1} + \eta_t. \quad (5)$$

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Викладений та інші варіанти ДФМ реалізуються в методі динамічного факторного аналізу (ДФА), який поєднує ФА та аналізу ЧР, уміщуючи обчислені з багатовимірних ЧР матриці автокореляції. Такі моделі традиційно використовували для побудови економічних показників, макроекономічного аналізу, ділових циклів і прогнозування. В останні роки динамічні моделі факторів стали більш популярними в емпіричній макроекономіці. Вони мають певні переваги над іншими методами в різних аспектах і можуть, наприклад, впоратися з багатьма змінними, не вдаючись до складних проблем ступенів свободи, з якими часто доводиться зіштовхуватися в аналізі на основі регресії.

Підхід ДФА був розроблений для оброблення великих панельних ЧР, і кожен ЧР – це сума загальної та ідіосинкразійної компоненти. Загальний складник ЧР визначають декількома основними некорельованими і неспостережуваними загальними факторами, які можна отримати застосуванням лінійного фільтру до набору даних (можливо, із запізненням) [5, 6]. Узагальнена ДФМ використовує динамічну коваріаційну структуру даних і співвідношення між різними змінними в різних точках одночасно. Це суттєво відрізняє такий підхід від моделі прогнозу, яку запропонували Дж. Сток і М. Вотсон (J. Stock and M. Watson) в [7, 8], і ґрунтується на проектуванні на стягнутий простір статичних головних компонент даних [9].

Означене представлення варіанту ДФА вперше використали Форні і Рейхлін (Forni and Reichlin) 1998 р. [10], а пізніше його розвинуто в роботах [11–16]. Автори запропонували узагальнену ДФМ, яка дозволила обмежити взаємну кореляцію серед окремих компонент, і ввели цей метод для використання потенційно корисної інформації у великих панельних даних.

Інші підходи до побудови ДФМ запропонували Капетаніос і Марцелліно (Kapetanios, Marcellino) [17], Kapetanios [18], а його застосування представлено роботах [19–21]. У дослідженні [22] наведено посилання на значну кількість досліджень статистичних даних економік США і Європи, які доводять суттєве покращання прогнозів макроекономічних змінних в разі використання методу ДФА.

Із викладеного випливає, що застосування ДФА надає дослідникові великі можливості в розгляді еволюції динамічних економічних систем (ДЕС) різного складу. Водночас, ефективність застосованих моделей буде суттєво залежати від складу системи показників, обраного методу побудови динамічних факторів, їх кількості, тривалості лагу і, можливо, інших параметрів моделей. Ці питання потребують спеціальних досліджень і можуть бути ефективно вирішені під час розгляду конкретних динамічних систем.

**Мета і завдання дослідження.** Мета роботи – поглибити загальні теоретико-методологічні підходи до моделювання динамічних економічних систем на прикладі порівняльного аналізу динаміки макроекономічних показників обраних країн і визначити прогнозні значення цих показників із використанням розробленого методу, керованого ДФА [23; 24].

Розрізняють два види макроекономічного аналізу: аналіз ex post і аналіз ex ante. Аналіз ex post дозволяє оцінювати результати економічної діяльності і проводити порівняльний аналіз економічних потенціалів різних країн за вже отриманими даними статистики. Аналіз ex ante, тобто прогнозне моделювання економічних процесів і явищ, має визначити закономірності розвитку економічних процесів і,



якщо можливо, виявити причинно-наслідкові зв'язки між економічними явищами і спостережуваними змінними. У статті використано обидва підходи, а для побудови ДФМ та визначення прогнозних значень застосовано метод ДФА [23–25], основні положення якого опишемо нижче.

**Виклад основного матеріалу.** У розпорядженні дослідників динамічних економічних процесів фактично є тільки результати фіксації в деякі окремі моменти часу  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N, N < \infty$ )  $N$  значень обраних  $k$  економічних показників  $y_j(t), j = 1, 2, \dots, k$ . Ці значення формують певні числові послідовності

$$y_j(t) = \{y_j(t_1), y_j(t_2), \dots, y_j(t_i), \dots, y_j(t_N)\}, \quad (5)$$

де моменти часу  $t_1 < t_2 < \dots < t_N$  належать проміжку, на якому розглядається еволюція системи  $t_i \in [0, T]$ , а самі числові послідовності називають ЧР.

Значення показників можна розглядати як результати разового економічного експерименту і, на відміну від фізичних досліджень, можливості його повторення не існує. У цьому сенсі економічний експеримент близький до біологічних досліджень, які, зазвичай, неможливо повторити. З іншого боку, значення спостережень відомі тільки в окремі моменти часу, і це поєднує аналіз ДЕС з предметом дискретної математики. Для розглядуваних числових послідовностей існує певний закон однозначного визначення їх значень. В економічних ЧР значення показників також однозначні, але визначаються в результаті спостережень, і тому мають стохастичний характер.

Звичайно, у поводженні окремого ЧР визначають, зокрема, дві основні тенденції – тренд і коливання. Для окремо обраного самостійного елемента економічних взаємин на практиці потрібно скласти певні уявлення про функціонування всієї системи загалом і напрямки її розвитку. Для визначення тренду ДЕС з використанням емпіричних даних звичайно застосовують *статичний* і *динамічний* ФА. За допомогою першого вивчають вплив факторів на результативні показники для фіксованих значень часу в *ex post* аналізі. Другий використовують для визначення причинно-наслідкових зв'язків у динаміці. У *ретроспективному аналізі* вивчають причини зміни результативних показників за минулі періоди, а в *перспективному* досліджують поводження факторів і вислідних показників у майбутньому, тобто визначають їх прогнозні значення.

Модель ДФА складається з трьох груп рівнянь.

Першу групу утворюють рівняння динамічних факторів

$$F_m(t) = \sum_{i=1}^N a_{im} y_i^{(m-1)}(t), \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (6)$$

у вигляді лінійної комбінації заданих або резидуальних [23] ЧР.

До другої групи входять динамічні рівняння факторів, кожне з яких є  $AR(L)$  оцінкою  $m$ -го фактора

$$\hat{F}_m(t) = c_{m0} + \sum_{l=1}^L c_{lm} F_m(t-l) \quad (7)$$

де  $L$  – тривалість запізнення (лага),  $c_{m0}, c_{lm}$  – коефіцієнти авторегресії.

Третю групу становлять рівняння лінійних регресій

$$\hat{y}_j(t) = \sum_{m=1}^M d_{jm}^{(0)} + \sum_{m=1}^M d_{jm} F_m(t), \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (8)$$

які виражають ЧР через динамічні фактори. Ці рівняння використовують для оцінювання вихідних ЧР і дають їх деяку апроксимацію.

Для отримання прогнозних значень припускають про динамічну інваріантність ДЕС. Це означає, що рівняння (6), (8) можна застосувати для прогнозування. Тоді, після знаходження прогнозних значень факторів за допомогою рівнянь (7) при  $t > T$

$$\hat{F}_m(t) = c_{m0} + \sum_{l=1}^L c_{lm} F_m(t-l), \quad t > T \quad (9)$$

можна побудувати прогноз для кожного ряду. Для визначення прогнозних значень окремих показників у рівняннях (8) замість факторів треба використовувати їх прогнозні значення

$$\hat{y}_j(t) = \sum_{m=1}^M d_{jm}^{(0)} + \sum_{m=1}^M d_{jm} \hat{F}_m(t), \quad t > T, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (10)$$

Процедура визначення параметрів моделі. Для знаходження невідомих коефіцієнтів у (8–10) існує можливість застосування різних методів, наприклад, таких, як звичайний МНК, або метод випадкового пошуку в багатовимірному просторі коефіцієнтів тощо.

У запропонованій у роботі процедурі моделювання фактори будуються послідовно один за одним, а оцінки ЧР на кожному кроці уточнюються ітеративно. Для знаходження відповідних невідомих груп коефіцієнтів  $a_i^{(j)}, c_{jl}, d_{ij}$  при побудові чергового  $j$ -го фактору знаходиться мінімум функцій  $\Phi_j$





$$\Phi_j = w_0^{(j)} \langle F_j - \hat{F}_j, F_j - \hat{F}_j \rangle_L + \sum_{i=1}^k w_i^{(j)} \langle y_i^{(j-1)} - \hat{y}_i, y_i^{(j-1)} - \hat{y}_i \rangle, \quad (11)$$

за умови нормування

$$\langle F_j, F_j \rangle = V_j. \quad (12)$$

У формулах (11), (12) символами  $\langle \dots \rangle$  позначено формальні коваріації числових векторів

$$\langle y_i, y_j \rangle = \frac{1}{p-1} \sum_{s=1}^p (y_{is} - \bar{y}_i)(y_{js} - \bar{y}_j), \quad \langle y_i, y_j \rangle_L = \frac{1}{p-L-1} \sum_{s=L+1}^p (y_{is} - \bar{y}_i^L)(y_{js} - \bar{y}_j^L),$$

тут  $w_0, w_p, V_j$  – додаткові додатні параметри, які отримали назву ваг, та  $\bar{y}_i = (1/p) \sum_{s=1}^p y_{is}$  – арифметичні середні значення ЧР.

Розв'язок задачі нелінійного програмування (11)–(12) будується за допомогою спеціально розробленого алгоритму розв'язання задачі на умовний екстремум, який ураховує алгебраїчні властивості цільової функції [21].

У реалізованому варіанті ДФА перший фактор будується як лінійна комбінація заданих ЧР, другий – уже як лінійна комбінація резидуальних рядів першого наближення  $r_j^{(1)}(t) = y_j(t) - \hat{y}_j(t)$ . Після знаходження оцінок цих рядів формуються резидуальні ряди другого наближення  $r_j^{(2)}(t) = y_j(t) - \hat{y}_j(t) - \hat{r}_j^{(1)}(t)$ . Процедура повторюється  $M$  разів, доки не буде побудовано останній фактор.

Оцінювання якості прогнозу розвитку ДЕС і керовані моделі ДФА. Для знаходження прогнозних значень існує два шляхи пошуку. У першому варіанті інтервальний прогноз будується на основі моделі на декілька кроків вперед. У другому варіанті, який можна назвати рекурсивним, прогноз виконується тільки на один крок вперед, тобто знаходяться значення  $\hat{y}_i(t_n + 1)$ . Ці значення додаються в кінець заданих ЧР, модель будується повторно, і подальший прогноз, на наступний інтервал, здійснюється вже на основі нової моделі з розширених ЧР  $y_j^*(t) = \{y_j(t_1), y_j(t_2), \dots, y_j(t_n), \dots, y_j(t_n), \hat{y}_j(t_n + 1)\}$ . Такий процес продовжується до кінця часового інтервала прогнозування. Зауважимо, що для отримання достатньо надійного прогнозу довжина інтервала не повинна перевищувати 1/3 довжини наявних ЧР.

Якість розробленої моделі ДФА визначається параметрами екстремальних задач нелінійного програмування, розв'язок яких залежить від обраних значень ваг  $w_0, w_p$ , констант нормування  $V_m$ , довжини лагу  $L$ , а також від співвідношення  $\eta = T_j / T$  між базовим і контрольним періодами в ex post прогнозі. За їх різних значень будемо отримувати різні моделі. Тому для оцінювання параметрів моделі можна запропонувати таку процедуру, яку можна розглядати як налагоджування моделі ДФА.

Для конкретної ДЕС обирають деякий показник, діапазони змін відповідних ваг і констант нормування, довжину лагу та обчислюють значення похибок на контрольному періоді. Після цього відповідно до обраного критерію оцінювання якості прогнозу в контрольному періоді, наприклад, для коефіцієнта нерівності Тейла, приймають значення параметрів, для яких похибка є мінімальною. Якщо в обраних діапазонах змін ваг знайдена похибка виявиться незадовільною, діапазон ваг потрібно змінити, а розрахунки повторити. Хоча фактично ця процедура зводиться до простого перебору, а в дослідника з'являється можливість активно втручатися в процес побудови моделі.

Для визначення похибки прогнозу в дослідників немає фактичних значень показників у прогнозному періоді, а поширення на цей часовий інтервал значень похибок, знайдених у процесі ex-post прогнозу, необгрунтоване. Крім того, у первинному аналізі ДЕС досить важко визначити, який із показників найбільш суттєво впливає на динаміку всієї системи, і для знаходження параметрів моделі може призначатися довільний показник. Тоді й прогнозні значення в процесі налаштування системи на різні показники будуть відрізнятися між собою й утворювати деяку скінченну множину  $\Omega$ . У рекурсивному процесі після першого кроку для системи з  $k$  ЧР (показників) для  $j$ -го показника отримаємо множину  $\Omega_j = \{\hat{y}_{j,1}(T+1), \hat{y}_{j,2}(T+1), \dots, \hat{y}_{j,k}(T+1)\}$  з  $k$  прогнозних значень. Система з імовірністю  $1/k$  може розвиватися за  $k$  напрямками і, якщо врахувати всі можливі варіанти, на наступному часовому кроці виникне вже  $k^2$  прогнозних значень. Тобто, кількість напрямків можливого розвитку динамічної системи з кожним наступним кроком швидко зростатиме. Тому після першого кроку для подальшого дослідження руху системи природно як прогнозні значення кожного показника прийняти його усереднене значення. Тоді на кожному наступному кроці буде генеруватися знов тільки  $k$  варіант. Межі надійного інтервалу доцільно визначати мінімальним і максимальним значеннями знайдених прогнозів за правилом трьох сигм.

Результати прикладних досліджень. Наведемо деякі прикладні результати виконаних досліджень. Значимо, що за суттєвого, майже монотонного, зростання ВВП до 2007 року в пізнішому періоді зростання значно уповільнюється, спостерігаються виражені коливання, найбільш помітні для Білорусі, України і Фінляндії. Після 2013 року маємо вже падіння обсягу ВВП для України, Білорусі та частково для Угорщини. Локальні максимуми, які припадають на 2008 рік і 2013 рік, спостерігаємо для всіх країн.



Падіння ВВП спостерігаємо у 2014–2015 роках для Білорусі, України і частково Литви, тоді як для Фінляндії та Угорщини, навпаки, навіть має місце не лише зростання, а й збільшення його темпів. Зауважимо, що різка зміна показника для України дозволяє припустити, що динаміка ВВП обумовлена певними зовнішніми чинниками.

На прикладах побудованих моделей ДФА для систем показників окремих країн проілюструємо вплив деяких параметрів моделей на якість опису динамічних станів систем та отриманих прогнозів. Зокрема, розглянемо вплив складу системи, кількості факторів і довжини лага  $L$ . Для знаходження прогнозних значень застосуємо інтервальний прогноз і рекурсивний підхід із використанням усереднених прогнозних значень, а отримані прогнозні значення окремих показників порівняємо з фактичними даними статистики.

Вплив складу системи показників і кількості факторів проілюструємо на прикладі Естонії. Розглянуто систему з п'яти показників: номінального ВВП, ВВП/ППС, експорту, імпорту і зовнішнього боргу (у % ВВП). Після попередніх розрахунків обрано значення лага  $L = 4$  для різної кількості факторів і знайдено усереднений прогноз на один крок уперед. Зазначимо, що збільшення кількості факторів значно покращує апроксимацію динаміки ЧР, що для цієї системи особливо помітно порівняно з однофакторною і двофакторною моделями. Водночас, в обраному достатньо великому діапазоні ваг не вдалося досягти задовільної апроксимації для кожного ЧР, і тому з початкової системи було видалено показник «зовнішній борг».

Далі на прикладі показників Латвії оцінено вплив довжини лага. Як початкову розглянуто систему з п'яти показників, у якій, порівняно із системою для Естонії, показник «зовнішній борг» замінено показником «населення». Після попереднього аналізу обрано трифакторна модель ДФА, а її налаштування на другий показник показало найменшу похибку. Водночас, розрахунки в широкому діапазоні ваг показали, що систему з указаних п'яти ЧР не вдається адекватно змодельювати, і тому з неї було видалено показник «населення». У цьому випадку вдалося досягти задовільного опису динаміки ЧР, що дозволило оцінити вплив довжини лага  $L$ . Деякі отримані результати розрахунків для системи з чотирьох показників, розглянутої на базовому періоді 1998–2016 рр., показано на рис. 1, 2: графіки на рис. 1 відповідають значенню  $L = 3$ , а на рис. 2 – значенню  $L = 4$ .

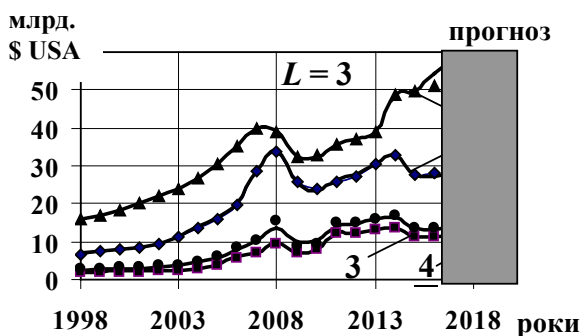


Рис. 1. Динаміка макропоказників економіки Латвії і її опис трифакторною моделлю з інтервальним прогнозом при  $L=3$ :

1,  $\diamond$  – ВВП, 2,  $\blacktriangle$  – ВВП/ППС, 3,  $\blacksquare$  – експорт, 4,  $\bullet$  – імпорт.

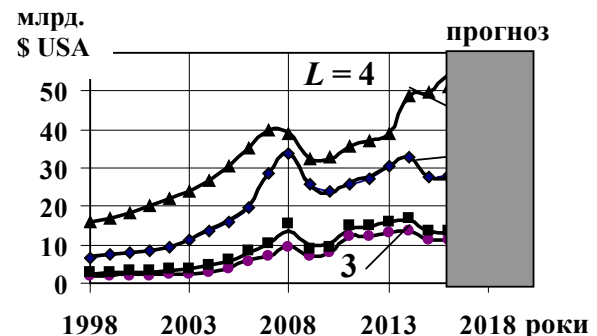


Рис. 2. Динаміка макропоказників економіки Латвії і її опис трифакторною моделлю з інтервальним прогнозом при  $L=4$ :

Також отримано інтервальний прогноз на 2017–2020 рр. Розраховані та фактичні значення показників наведено в табл. 1. Зауважимо, що значення показників за 2016 рік, наведені в джерелах [1, 2], дещо відрізняються, а за 2017 рік статистика на сайті [1] взагалі відсутня, і тому для фактичних значень показників за 2017 рік наведено значення з [2].

Таблиця 1

Прогнозні значення деяких економічних показників макроекономіки Латвії за допомогою інтервального прогнозування

Показник	Прогнозні значення показників на 2017–2020 рр., млрд. \$ США								Фактичні значення показників
	При $L = 3$				при $L = 4$				
рік	2017	2018	2019	2020	2017	2018	2019	2020	2017 р
ВВП	29,21	29,25	29,92	30,71	28,60	30,40	31,86	34,40	–
ВВП/ППС	51,72	50,07	49,16	48,66	58,02	59,61	59,50	59,88	55,02*)
Експорт	11,87	12,25	12,98	13,70	11,60	13,11	14,60	16,91	12,84*)
Імпорт	13,84	14,19	15,57	17,22	13,88	15,45	16,98	19,40	15,79*)

\* За даними сайту «CIA The World Factbook» [2].



Із наведених графіків випливає, що модель, побудована з використанням трьох факторів, добре описує задані ЧР, і тривалість лага майже не впливає на точність апроксимації показників у базовому часовому інтервалі. Водночас прогнозні значення показників суттєво відрізняються. Якщо для  $L = 4$  прогноз показує суттєве зростання всіх показників, то для  $L = 3$  зростання передбачено тільки для ВВП, експорту й імпорту, а для ВВП/ППС прогнозується падіння. Наприклад, відносні похибки прогнозу для ВВП/ППС становлять  $\varepsilon_1 = -5,9\%$  і  $\varepsilon_2 = 5,4\%$ , якщо  $L = 3$  і  $L = 4$  відповідно. Досить значне розходження прогнозних і фактичних значень можна пояснити тим, що в базових ЧР використано дані з [1], а для контрольних значень – з [2].

Таблиця 2

**Прогнозні значення деяких економічних показників макроекономіки Угорщини за допомогою інтервального прогнозування**

Показник	Прогнозні значення показників (млрд. \$ США) на 2017–2029 рр., визначені на періоді 1998–2016 рр.			Фактичні значення
	2017	2018	2019	
Рік	2017	2018	2019	2017
ВВП	122,2	131,3	139,6	–
ВВП/ППС	277,8	286,5	287,3	289,6*)
Експорт	93,82	102,4	110,1	98,74*)
Імпорт	88,82	96,38	103,4	91,4 *)
Зовнішній борг	75,33	78,33	80,40	73,6

Для показників Угорщини також було визначено інтервальний прогноз на три кроки вперед. Розглянуто систему з тих самих п'яти показників, як і для Латвії. Після попередніх розрахунків обрано трифакторну модель при  $L = 4$ , побудовану на базовому періоді 1998–2016 рр. Результати розрахунків наведено в табл. 2 і на рис. 3.

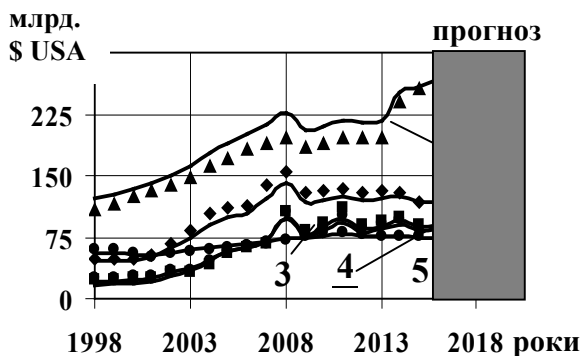


Рис. 3. Динаміка макропоказників економіки Угорщини і її опис трифакторною моделлю з інтервальним прогнозом при  $L=4$ :

1, ◆ – ВВП, 2, ▲ – ВВП/ППС, 3, ■ – експорт, 4, ● – імпорт.

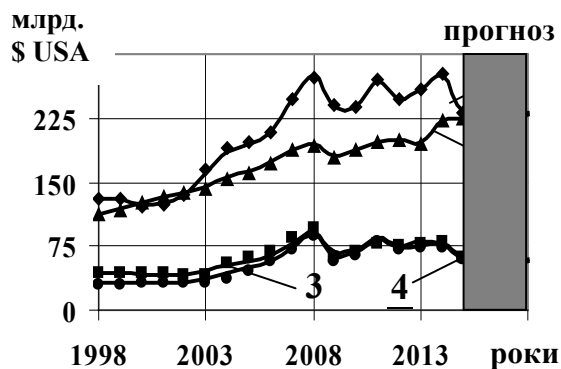


Рис. 4. Динаміка макропоказників економіки Фінляндії і її опис трифакторною моделлю на базовому періоді 1998–2015 рр.

Відносні похибки прогнозу на 2017 рік при цьому становлять для ВВП/ППС  $\varepsilon = -4,1\%$  для експорту  $\varepsilon = -5,0\%$ , для імпорту  $\varepsilon = -2,9\%$ .

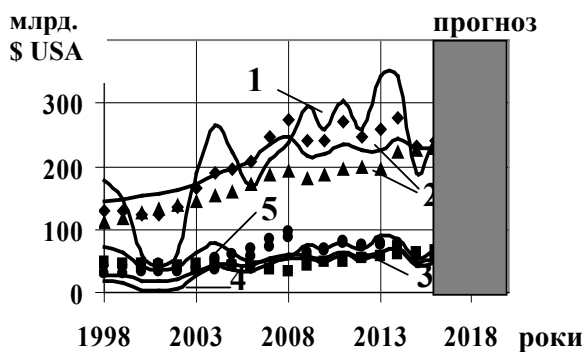


Рис. 5. Динаміка макропоказників економіки Фінляндії і її опис трифакторною моделлю на базовому періоді 1998–2016 рр.,

1, ◆ – ВВП, 2, ▲ – ВВП/ППС, 3, ■ – експорт, 4, ● – імпорт.

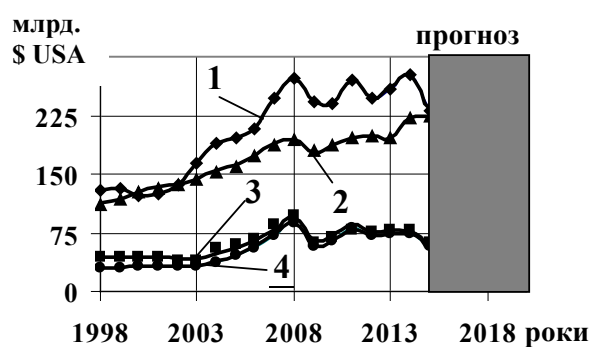


Рис. 6. Динаміка макропоказників економіки Фінляндії і її опис трифакторною моделлю з рекурсивним прогнозом.



Порівняння інтервального і рекурсивного прогнозу на декілька кроків на перспективу продемонструємо на прикладі показників Фінляндії. Для системи показників побудовано трифакторні моделі, якщо  $L = 4$  на базовому періоді 1998–2015 рр. (рис. 4) для чотирьох показників (ВВП, ВВП/ППС, експорт, імпорт) і на розширеному періоді 1998–2016 рр. (рис. 5) для п'яти показників (ВВП, ВВП/ППС, експорт, імпорт, зовнішній борг). На графіках (рис. 3–6) також показано інтервальні прогнози показників.

Як видно з порівняння рис. 4 і рис. 5, для п'ятикомпонентної системи не вдалось отримати задовільний опис базової системи ЧР, але в цьому випадку це не суттєво вплинуло на отримані прогнози.

Прогнозні значення показників в інтервальному та рекурсивному прогнозуванні на 3 кроки вперед і відповідні їх фактичні значення за 2016, 2017 рр., наведено у табл. 3. Як зазначено, значення показників, наведені в джерелах [1, 2] відрізняються, тому для фактичних значень показників за 2016 рік наведено обидва значення.

Таблиця 3

## Прогнозні значення деяких економічних показників макроекономіки Фінляндії

Показник	Прогнозні значення показників (млрд. \$ США) на 2016–2018 рр., визначені на періоді 1998–2015 рр.						Фактичні значення показників, млрд. \$ США	
	інтервальний прогноз			рекурсивний прогноз			2016	2017
Рік	2016	2017	2018	2016	2017	2018	2016	2017
ВВП	224,9	222,9	229,3	225,0	222,9	230,2	239,2	-
ВВП/ППС	230,0	231,5	232,4	230,0	231,5	232,2	230,0, 236,2*)	239,6*)
Експорт	58,12	57,11	58,69	57,99	57,11	58,21	57,1, 58,9*)	59,7*)
Імпорт	56,72	55,85	57,71	56,52	55,85	56,82	54,5, 57,2*)	58,5*)

\*) За даними сайту «CIA the World Factbook» [2].

Із наведених даних випливає, що інтервальні та рекурсивні прогнози відрізняються несуттєво, і максимальне розходження для показників 2018 р. не перевищує 1 %. Похибка інтервального прогнозу порівняно з даними сайту [1] за 2016 р. для ВВП/ППС не перевищує 0,5 %, і становить 1,8 % для експорту та 4,1 % для імпорту. Похибки рекурсивного прогнозу для цієї системи практично збігаються з цими оцінками. Значення різних прогнозів за 2017 рік теж збігаються. Похибки, порівняно з даними сайту [1], становлять –3,4 %, –4,6 % і –4,5 % для ВВП/ППС, експорту й імпорту відповідно.

Вплив тривалості лага на різних базових періодах спостережень також досліджено для показників економіки України. Розглянуто системи з п'яти і чотирьох показників, побудовано й відповідні трифакторні моделі. Установлено, що систему з п'яти показників не вдається (в розглянутому діапазоні ваг) змодельювати з потрібною точністю, і далі розглянуто моделі з чотирьох показників. Результати розрахунків для двох значень лага наведено на рис. 13, 14 для базового періоду 1998–2015 рр., на рис. 14, 15 для розширеного періоду 1998–2016 рр.

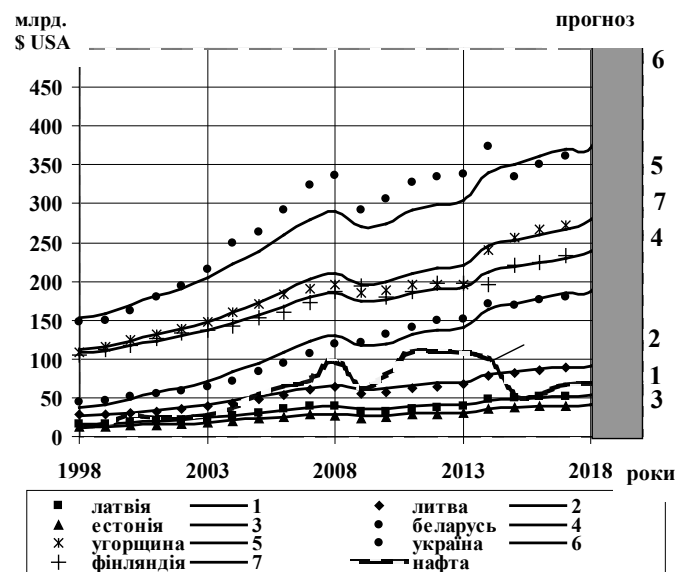


Рис. 7. Динаміка ВВП/ППС різних країн та її опис однофакторною моделлю з рекурсивним прогнозом і зміною світових цін на нафту





Результати досліджень засвідчують наявність певних загальних тенденцій у динаміці економіки розглянутих країн. Це спонукало розглянути систему, складену з ВВП/ППС семи різних країн, дослідити її з використанням статистичних даних за 1998–2017 рр. й отримати прогноз на три наступні роки. Побудовано моделі для різної кількості факторів, якщо значення лага  $L = 3$ , з використанням рекурсивного прогнозу. Розрахунки засвідчили, що задовільна точність опису динаміки системи досягається вже для однофакторної моделі. Певна аналогія в динаміці ВВП/ППС може бути спричинена зовнішніми чинниками. Тому додатково для оцінювання такого впливу показано зміну світових цін на нафту марки «Brent» за даними статистики до 2018 р. включно і цей показник не входив до системи ЧР. Результати розрахунків наведено на рис. 7.

Із наведених даних випливає, що для розглянутих країн із певними коливаннями спостерігаємо зростання обраного показника. Рекурсивний прогноз також показує на збільшення ВВП/ППС для всіх країн. Звертають на себе увагу 2008–2009 роки, коли різке падіння світових цін на нафту збіглося з суттєвим падінням ВВП/ППС, але одночасно падіння цін 2014 року не зупинило його зростання. Це свідчить не тільки про зв'язок зі світовими цінами на нафту, але й про наявність низки інших зовнішніх чинників.

**Висновки.** Здобуті результати дозволяють стверджувати, що розроблено нову ефективну версію методу ДФА. На відміну від чинного інструментарію та концептуальних підходів до аналізу динамічних економічних систем дослідник має можливість активно втручатися в процес побудови відповідних моделей, щоб мінімізувати похибку довільно обраного показника під час проведення ex-post аналізу. Закладена в моделі можливість мінімізувати похибку певного показника призводить до мультиваріантного прогнозу і визначає  $k$  можливих шляхів подальшої еволюції динамічних систем. У розробленій схемі рекурсивного прогнозування на поточному кроці побудови моделі використано усереднені значення з  $k$  отриманих прогнозів, що дає можливість урахувати вплив кожного часового ряду і певним чином покращити надійність прогнозування.

Зазначимо, що матеріали досліджень підтверджують ефективність розробленої методики. В усіх розглянутих прикладах похибка прогнозу окремих показників не перевищувала 5%, а для деяких була менша, ніж 1%. Отримання такого рівня достовірності відкриває нові можливості для аналізу динаміки довільних економічних систем і дозволяє використовувати розроблені концептуальні положення та відповідну методику в науково-дослідницькій практиці.

### Література:

1. Экономические показатели: статистика, графики: .www.ereport.ru.
2. Central Intelligence Agency. The World Factbook: <https://www.cia.gov/library/publications/the-world-factbook/>.
3. Bai J., Ng S. Large Dimensional Factor Analysis. *Foundations and Trends in Econometrics*. 2008. Vol. 3(2). P. 89–163.
4. Sezgin F., Kinay B. A dynamic factor model of the evaluation of the phinancial crisis in Turkey. *Bull. Soc. Sci. Med. Grand Duche Luxemb.* 2010. Spec. No 1. P. 109–117.
5. Peña D., Poncela P. Nonstationary dynamic factor analysis. *J. of Statistical Planning and Inference*. 2006. No. 136. 1237–1257.
6. Ajevskis V., Dāvidsons G. Dynamic factor models in forecasting Latvia's Gross domestic product. *Department of the Bank of Latvia*. 2008. 2. 24 p.
7. Stock J., Watson M. Macroeconomic Forecasting Using Diffusion Indexes. *J. of Business and Economic Statistics*. 2002. Vol. 20. P. 147–162.
8. Stock J., Watson M. Forecasting Using Principal Components From a Large Number of Predictors. *J. of the American Statistical Association*. 2002. Vol. 97. P. 1167–1179.
9. Schneider M., Spitzer M. Forecasting Austrian GDP Using The Generalized Dynamic Factor Model. *OENB Working Paper*. 2004. No 89.
10. Forni M., Reichlin L. Lets' Get Real: A Factor Analytical Approach to Disaggregated Business Cycle Dynamics. *Review of Economic Studies*. 1998. № 65. P. 453–473.
11. Forni M., Lippi M. The Generalized Dynamic Factor Model: Representation Theory. *Econometric Theory*. 2001. Vol. 17. P. 1113–1141.
12. Forni M., Hallin M., Lippi M., Reichlin L. The generalized Dynamic Factor Model: Identification and Estimation. *The Review of Economics and Statistics*, 2000. Vol. 82. P. 540–554.
13. Forni M., Hallin M., Lippi M., Reichlin L. Coincident and Leading Indicators For The Euro Area. *Economic Journal*. 2001. Vol. 111. P. 62–85.
14. Forni M., Hallin M., Lippi M., Reichlin L. Do Financial Variables Help Forecasting Inflation and Real Activity in the Euro Area? *J. of Monetary Economics*. 2003. Vol. 50. P. 1243–1255.
15. Forni M., Hallin M., Lippi M., Reichlin L. The Generalized Dynamic Factor Model: Consistency and Rates. 2004. *J. of Econometrics*. Vol. 119. P. 231–255.
16. Forni M., Hallin M., Lippi M., Reichlin L. The Generalized Dynamic Factor Model: One-Sided Estimation and Forecasting. 2005. *J. of the American Statistical Association*. Vol.100. P. 830–840.



17. Kapetanios G., Marcellino M. A Parametric Estimation Method For Dynamic Factor Models of Large Dimensions. 2004. *Queen Mary University of London. Working Paper*. No 489.
18. Kapetanios G. A Note on Modelling Core Inflation for the UK Using a New Dynamic Factor Estimation Method and a Large Disaggregated Price Index Data Set. *Economics Letters*. 2004. Vol. 85. P. 63–69.
19. Camba-Mendez G., Kapetanios G. Forecasting Euro Area Inflation Using Dynamic Factor Measures of Underlying Inflation. *J. of Forecasting*. 2005. Vol. 25. P. 491–503.
20. Schumacher C. Forecasting German GDP Using Alternative Factor Models Based on Large Data Sets. *J. of Forecasting*. 2007. Vol. 26. P. 271–302.
21. Eickmeier S., Ziegler C. How Successful are Dynamic Factor Models at Forecasting Output and Inflation? A Meta-Analytic Approach. *Journal of Forecasting*, 27. 237–265. 116. Layout Bulletin 02.06.2010 10:31 Uhr Seite.
22. Giannone D., Matheson D. A New Core Inflation Indicator for New Zealand. *International Journal of Central Banking*. 2007. Vol. 3 P. 145–180.
23. Вітлінський В. В., Катуніна О. С. Моделювання динаміки формування асортименту продукції промислових підприємств. Сучасні концепції прогнозування розвитку складних систем. Бердянськ, 2014. С. 38–2.
24. Катуніна О. С. Прогнозное факторное моделирование индексов фондового рынка. *Бізнес Інформ*. 2017. № 11. С. 197–202.