Отримано: 02 лютого 2022 р.

Прорецензовано: 16 лютого 2022 р.

Прийнято до друку: 21 лютого 2022 р.

e-mail: taras.zabolotskyy@lnu.edu.ua

DOI: 10.25264/2311-5149-2022-24(52)-128-137

Вітлінський В. В., Заболоцький М. В., Заболоцький Т. М., Коляда Ю. В. Імовірнісний аналіз вибіркової оцінки бета-коефіцієнта портфеля з найменшим рівнем Value-at-Risk. *Наукові записки Національного університету «Острозька академія». Серія «Економіка» : науковий журнал.* Острог : Вид-во НаУОА, березень 2022. № 24(52). С. 128–137.

УДК: 336.76; 311.15

JEL-класифікація: C13, C15, G11

ORCID-ідентифікатор: https://orcid.org/0000-0002-3355-2579

ORCID-ідентифікатор: https://orcid.org/0000-0001-6102-707X

ORCID-ідентифікатор: https://orcid.org/0000-0003-0524-0428

ORCID-ідентифікатор: https://orcid.org/0000-0003-2516-9817

Вітлінський Вальдемар Володимирович,
доктор економічних наук, професор, професор кафедри математичного моделювання та статистики, ДВНЗ «КНЕУ імені Вадима Гетьмана»

Заболоцький Микола Васильович,
доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри математичної економіки, економетрії, фінансової та страхової математики, Львівський національний університет імені Івана Франка

Заболоцький Тарас Миколайович,
доктор економічних наук, професор, професор кафедри програмування, Львівський національний університет імені Івана Франка

Коляда Юрій Васильович,
доктор економічних наук, професор кафедри «Математичного моделювання та статистики» КНЕУ ім. Вадима Гетьмана

ІМОВІРНІСНИЙ АНАЛІЗ ВИБІРКОВОЇ ОЦІНКИ БЕТА-КОЕФІЦІЄНТА ПОРТФЕЛЯ З НАЙМЕНШИМ РІВНЕМ VALUE-AT-RISK

Серед низки аспектів управління ризиком у діяльності фінансових установ займають проблеми диверсифікації та оцінювання бета-коефіцієнта портфеля фінансових активів. Робота присвячена дослідженню статистичних властивостей вибіркової оцінки бета-коефіцієнта портфеля фінансових активів із найменшим рівнем Value-at-Risk за умов сталості ваг еталонного портфеля та нормальності розподілу вектора дохідностей активів портфеля. За відомих параметрів розподілу вектора дохідностей активів портфеля, знайдено аналітичний вираз для обчислення його бета-коефіцієнта. Оскільки на практиці ці параметри невідомі, ми використовуємо вибіркові оцінки та отримуємо вибіркову оцінку бета-коефіцієнта портфеля, яка є випадковою величиною. У роботі знайдено асимптотичний розподіл цієї оцінки та, на основі імітаційного моделювання зі 100000 повторень, досліджено швидкість збіжності до нього відповідних емпіричних розподілів. За відомі характеристики розподілу вектора дохідностей активів портфеля взято відповідні вибіркові оцінки, отримані з даних про щоденні ціни акцій компаній, включених до переліку Dow Jones за період часу з 01.07.2020 по 11.01.2022. Розглянуто шість портфелів із різними розмірностями ({5, 10, 15, 20, 25, 30} перших компаній зі списку Dow Jones посортованих у алфавітному порядку). За еталонний портфель обрано портфель із однаковими вагами. Оскільки вибірковій оцінці бета-коефіцієнта притаманне суттєве зміщення, яке зростає зі збільшенням кількості активів у портфелі, то в роботі запропоновано уточнену оцінку, зміщення якої істотно менше та не залежить від кількості активів у портфелі. Встановлено, що використання отриманих результатів на практиці з метою моделювання поводження вибіркової оцінки бета-коефіцієнта портфеля можливе за наявності вибірок історичних даних помірної розмірності (500-1000).

***Ключові слова**: бета-коефіцієнт, портфель фінансових активів із найменшим рівнем Value-at-Risk, багатовимірний нормальний розподіл, асимптотичний розподіл, імітаційне моделювання.*

Valdemar Vitlinskyi,
Doctor of Economic Sciences, Professor, Professor of the Department of Mathematical Modeling and Statistics, SHEI KNEU named after V. Hetman

Mykola Zabolotskyy,
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Mathematical Economics, Econometrics, Financial and Insurance Mathematics, Ivan Franko Lviv National University

Taras Zabolotskyy,
Doctor of Economic Sciences, Professor, Professor of the Department of Programming, Ivan Franko Lviv National University

Yurii Koliada,
Doctor of Economic Sciences, docent, Professor of the Department of Mathematical Modeling and Statistics, SHEI KNEU named after V. Hetman

PROBABILISTIC ANALYSIS OF BETA-COEFFICIENT SAMPLE ESTIMATOR FOR MINIMUM VALUE-AT-RISK PORTFOLIO

The problems of financial assets portfolio beta-coefficient diversification and evaluation play an important role among aspects of risk management in the financial institutions activities. The paper is dedicated to statistical properties of the sample estimator of the financial assets minimum Value-at-Risk portfolio beta-coefficient. We assume that the weights of the portfolio benchmark are constant and the vector of portfolio assets returns is multivariate normally distributed. We find an analytical expression for calculating the beta-coefficient if the parameters of the portfolio assets returns distribution vector are known. In practice, these parameters are usually unknown, so we make use of distribution parameters sample estimators. By replacing the unknown parameters in the expression for calculating the beta-coefficient with their sample estimators, we obtain a sample estimator of the beta-coefficient, which is a random variable. We provide an asymptotic distribution of this sample estimator. We investigate the rate of empirical distributions convergence to asymptotic ones using simulation modeling with 100,000 repetitions. We take the corresponding sample estimators as the precise value of the distribution parameters of the portfolio assets returns vector. These estimators are obtained from the data on daily stock prices of companies included in the Dow Jones list for the period from 01.07.2020 to 11.01.2022. Six portfolios with different dimensions ({5, 10, 15, 20, 25, 30} of the first companies from the Dow Jones list sorted in alphabetically order) are considered. We select the equally weighted portfolio for the benchmark portfolio. It is noted that the beta-coefficient sample estimator is significantly biased and the bias increases with the number of assets in portfolio. We propose a corrected estimator whose bias is significantly smaller and does not depend on the number of assets in portfolio. It is concluded that the obtained asymptotic results can be used in practice for modeling the behavior of the sample estimator of the beta-coefficient in the presence of moderate dimension historical data samples (500-1000 observations).
Keywords: *beta-coefficient, financial assets minimum Value-at-Risk portfolio, multivariate normal distribution, asymptotic distribution, simulation modeling.*

Постановка проблеми. Диверсифікація є одним із основних способів зниження ризиків у фінансовій діяльності. Для диверсифікації фінансові активи об’єднуються в структуру, котра називається портфелем фінансових активів. Використання наукових підходів у формуванні портфеля фінансових активів дозволяє не лише безумовно мінімізувати ризик, але й мінімізувати ризик за заданого рівня очікуваної дохідності, причому можливо також додавати певні обмеження на ваги портфеля. Однією з основних проблем теорії портфеля, є вибір міри ризику. Найвідомішими мірами ризику є дисперсія, Value-at-Risk та умовне Value-at-Risk. Ці міри дозволяють оцінити несистематичний ризик, що не залежить від стану ринку та може бути знижений шляхом диверсифікації. Натомість, для інвестора також становить інтерес і систематичний ризик портфеля, який спричинений загальноринковими чинниками. Одним із основних показників систематичного ризику портфеля фінансових активів є його бета-коефіцієнт. Цей показник дозволяє оцінити систематичний ризик портфеля інвестора в порівнянні з певним еталонним портфелем. Як у випадку визначення дисперсії, Value-at-Risk чи умовного Value-at-Risk портфеля, так і у випадку обчислення бета-коефіцієнта, необхідним є знання параметрів розподілу вектора дохідностей активів, включених до портфелів. На практиці ці параметри невідомі, а отже, обчислюючи ризик, інвестор змушений використовувати їхні оцінки, які є випадковими величинами. За такого підходу отримані інвестором значення ризику є реалізаціями випадкової величини. Ігнорування цього може призвести до хибної інтерпретації отриманих результатів, а отже, спричинити фінансові втрати. Тому актуальною є проблема дослідження ймовірнісних властивостей вибіркової оцінки бета-коефіцієнта портфеля.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Питання, пов’язані з вивченням імовірнісних властивостей оцінок характеристик портфеля, розглядалися в працях [1]-[7]. У [1] досліджено статистичні властивості оцінок ваг та характеристик класичних портфелів (із найменшим рівнем дисперсії, з максимальним відношенням Шарпа та з максимальною очікуваною квадратичною корисністю) за припущення нормальності розподілу вектора дохідностей активів портфеля; в [2] ці результати узагальнено на випадок еліптичності розподілу вектора дохідностей; у працях [3]-[4] вивчаються такі ж питання та властивості оцінок ваг і характеристик класичних портфелів фінансових активів та параметрів ефективної множини за припущення, що вектор дохідностей активів поводиться як багатовимірний VARMA–GARCH процес. Зауважимо, що у працях [1]-[4] мірою ризику портфеля слугувала дисперсія. У [5] знайдено точний розподіл характеристик портфеля фінансових активів із найменшим рівнем Value-at-Risk (умовного Value-at-Risk) за нормальності розподілу вектора дохідностей активів портфеля; в [6]-[7] досліджено аналогічну задачу відповідно за припущення, що вектор дохідностей активів портфеля поводиться як довільний стаціонарний процес та для портфеля отриманого з задачі максимізації функції корисності на основі Value-at-Risk за додаткових лінійних обмежень на його ваги.

Дослідження ймовірнісних властивостей оцінки бета-коефіцієнта різних портфелів фінансових активів проведено у [8]-[11]. Зокрема, в [8] знайдено точний розподіл вибіркової оцінки бета-коефіцієнта за припущення, що ваги портфелів інвестора та еталонного сталі та вектор дохідностей активів портфелів нормально розподілений, а також побудовано статистичний тест та інтервал довіри для бета-коефіцієнта. У [9] результати праці [8] поширено на випадок, коли вектор дохідностей активів поводиться як стаціонарний процес Гауса, а в [10]-[11] – на випадок портфеля інвестора з найменшим рівнем дисперсії та з максимальним відношенням Шарпа відповідно.

Метою роботи є дослідження ймовірнісних властивостей вибіркової оцінки бета-коефіцієнта портфеля інвестора з найменшим рівнем Value-at-Risk, якщо ваги еталонного портфеля сталі, а вектор дохідностей активів портфелів має нормальний розподіл та його реалізації не автокорельовані.

Основні результати. Нехай X_{it} неперервна дохідність активу i в момент часу t, тобто X_{it}=100ln(P_{it}/P_{it-1}), де P_{it} – ціна цього активу в момент часу t, еталонний портфель і портфель інвестора сформовані з k фінансових активів. Вектор часток капіталу, вкладених у відповідний фінансовий актив $\mathbf{w}=(w_1,w_2,...,w_k)'$, назвемо структурою портфеля (портфелем). Символ “ ′ ” використано для позначення транспонування. Нехай **1** – k-вимірний вектор, елементами якого є одиниці, тоді щодо портфеля **w** виконується умова $\mathbf{w}'\mathbf{1}=1$. Позначимо $\mathbf{X}_t=(X_{1t}, X_{2t},..., X_{kt})'$ вектор дохідностей фінансових активів портфеля в момент часу t. Визначимо дохідність $X_\mathbf{w}(t)$ портфеля **w** в момент часу t як зважену суму дохідностей його компонент (ваг), тобто $X_\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}'\mathbf{X}_t$. Зрозуміло, що $X_\mathbf{w}(t)$ є випадковою величиною, математичне сподівання та дисперсія якої залежатимуть від часу t, якщо не накладати ніяких додаткових обмежень на поводження $\mathbf{X}_t$. Щоб уникнути цього, надалі вважатимемо, що вектор $\mathbf{X}_t$ має k-вимірний нормальний розподіл із параметрами $\boldsymbol{\mu}$ – вектор середніх та $\boldsymbol{\Sigma}$ – матриця коваріацій. Якщо z_γ – γ квантиль стандартного нормального розподілу, то сподівана дохідність $R_\mathbf{w}=\mathrm{M}(X_\mathbf{w}(t))=\mathbf{w}'\boldsymbol{\mu}$, дисперсія $V_\mathbf{w}=\mathrm{D}(X_\mathbf{w}(t))=\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}$ та Value-at-Risk (надалі VaR) за рівня довіри α $VaR_\mathbf{w}(\alpha)=z_\alpha(V_\mathbf{w})^{1/2}-R_\mathbf{w}$ портфеля **w** не залежать від часу. Портфель фінансових активів із найменшим рівнем VaR отримуємо з задачі мінімізації

$$VaR_\mathbf{w}(\alpha)=z_\alpha(V_\mathbf{w})^{1/2}-R_\mathbf{w} \to \min, \text{ за умови, що } \mathbf{w}'\mathbf{1}=1,$$

розв’язок якої можна записати у вигляді [12]

$$\mathbf{w}_{VaR} = \mathbf{w}_{GMV} + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}}\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}, \tag{1}$$

де $\mathbf{w}_{GMV} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}$, $V_{GMV} = \frac{1}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}$ – відповідно портфель із найменшою дисперсією та його дисперсія, $\mathbf{R} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}$, $s=\boldsymbol{\mu}'\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}$.

Якщо ваги еталонного портфеля $\mathbf{w}_{et}=(w_{et1}, w_{et2}, \ldots, w_{etk})'$ сталі, тоді з [8] для бета-коефіцієнта β_{VaR} портфеля $\mathbf{w}_{VaR}$ отримуємо

$$\beta_{VaR} = \frac{\mathbf{w}'_{VaR}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}}{\mathbf{w}'_{et}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}} = \frac{\left(\mathbf{w}_{GMV} + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}}\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}\right)'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}}{\mathbf{w}'_{et}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}} = \frac{\mathbf{w}'_{GMV}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}}{\mathbf{w}'_{et}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}} + \frac{\frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}}\boldsymbol{\mu}'\mathbf{R}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}}{\mathbf{w}'_{et}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}} =$$

$$= \frac{\frac{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}}{\mathbf{w}'_{et}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}} + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}}\frac{\boldsymbol{\mu}'\left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}\right)\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}}{\mathbf{w}'_{et}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}} = \frac{V_{GMV}}{\mathbf{w}'_{et}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}} + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}}\frac{\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w}_{et} - R_{GMV}}{\mathbf{w}'_{et}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}}. \tag{2}$$

Оскільки ваги і бета-коефіцієнт β_{VaR} портфеля (1) залежать від невідомих на практиці параметрів $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ розподілу вектора $\mathbf{X}_t$, то спочатку необхідно ці параметри оцінити. На основі вибірки значень векторів дохідностей активів $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2,\ldots\mathbf{X}_n$ вибіркові оцінки $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ та $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ параметрів $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ визначаємо рівностями:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{X}_i, \qquad \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})'. \tag{3}$$

Підставивши оцінки (3) у формулу (2), отримаємо вибіркову оцінку $\hat{\beta}_{VaR}$ бета-коефіцієнта β_{VaR}, а саме,

$$\hat{\beta}_{VaR} = \frac{\hat{V}_{GMV}}{\mathbf{w}'_{et}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\mathbf{w}_{et}} + \frac{\sqrt{\hat{V}_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - \hat{s}}}\frac{\hat{\boldsymbol{\mu}}'\mathbf{w}_{et} - \hat{R}_{GMV}}{\mathbf{w}'_{et}\boldsymbol{\Sigma}'\mathbf{w}_{et}}. \tag{4}$$

Звідси випливає, що $\hat{\beta}_{VaR}$ є випадковою величиною. З метою коректного використання $\hat{\beta}_{VaR}$ на практиці необхідно дослідити її ймовірнісні властивості. Характеристикою, яка найкраще описує властивості випадкової величини є її розподіл. У нашому випадку неможливо знайти точний розподіл випадкової величини $\hat{\beta}_{VaR}$. Тому, враховуючи обґрунтування з [13], ми дослідимо асимптотичний розподіл $\hat{\beta}_{VaR}$.

Приймемо, що $\boldsymbol{\theta}=(\boldsymbol{\mu}', \mathrm{vech}(\boldsymbol{\Sigma})')$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}=\left(\hat{\boldsymbol{\mu}}', \mathrm{vech}(\hat{\boldsymbol{\Sigma}})'\right)'$ – вибіркова оцінка вектора $\boldsymbol{\theta}$, отримана на основі (3). Нехай n – обсяг історичної вибірки, використаної для побудови оцінок (3), символ $\otimes$ означає добуток Кронекера, $\mathbf{0}_{m\times l}$ – нульова матриця розмірності $m\times l$, $\mathbf{I}_{m^2}$ – одинична матриця розмірності $m^2\times m^2$ (m і l довільні натуральні числа). Якщо $\mathbf{X}_t$ нормально розподілений вектор, реалізації якого не автокорельовані, то випадковий вектор $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta})$ буде асимптотично нормально розподілений із нульовим вектором середніх та асимптотичною коваріаційною матрицею [14, с. 218-225]

$$\boldsymbol{\Omega}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma} & \mathbf{0}_{k\times k(k+1)/2} \\ \mathbf{0}_{k(k+1)/2\times k} & \mathbf{D}_k^{+}\left(\mathbf{I}_{k^2}+\mathbf{K}_k\right)(\boldsymbol{\Sigma}\otimes\boldsymbol{\Sigma})\mathbf{D}_k^{+\prime}\end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Властивості та означення матриць $\mathbf{D}_k^{+}=(\mathbf{D}_k'\mathbf{D}_k)^{-1}\mathbf{D}_k'$, $\mathbf{D}_k$, $\mathbf{K}_k$, vec та vech операторів наведено в [15]. З [14, с. 211], отримуємо, що $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{VaR}-\beta_{VaR})\xrightarrow{d} N(0,\mathbf{G}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{G})$, де $\xrightarrow{d}$ означає збіжність за розподілом, $\mathbf{G}=(\partial\beta_{VaR}/\partial\boldsymbol{\mu}, \partial\beta_{VaR}/\partial\mathrm{vech}(\boldsymbol{\Sigma}))'$ – $k(k+3)/2$-вимірний вектор. Обчислимо вектори похідних $\partial\beta_{VaR}/\partial\boldsymbol{\mu}$ та $\partial\beta_{VaR}/\partial\mathrm{vech}(\boldsymbol{\Sigma})$ використовуючи правила матричного диференційного числення [15, с. 369-371] та властивості відповідних матриць (див., напр., [15, с. 351] та [16, с. 48-49]). Маємо

$$\frac{\partial\beta_{VaR}}{\partial\boldsymbol{\mu}}=\partial\left(\frac{\mathbf{w}_{VaR}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}}{\mathbf{w}_{et}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}}\right)\Big/\partial\boldsymbol{\mu}=\partial\left(\frac{V_{GMV}}{\mathbf{w}_{et}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}}\right)\Big/\partial\boldsymbol{\mu}+\partial\left(\frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2-s}}\frac{\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w}_{et}-R_{GMV}}{\mathbf{w}_{et}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}}\right)\Big/\partial\boldsymbol{\mu}=$$

$$=\left(\frac{\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w}_{et}-R_{GMV}}{\mathbf{w}_{et}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}}\right)\partial\left(\frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2-s}}\right)\Big/\partial\boldsymbol{\mu}+\left(\frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2-s}}\right)\partial\left(\frac{\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w}_{et}-R_{GMV}}{\mathbf{w}_{et}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}}\right)\Big/\partial\boldsymbol{\mu}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w}_{et}-R_{GMV}}{\mathbf{w}_{et}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}}\right)\frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\left(z_\alpha^2-s\right)^{3/2}}\frac{\partial s}{\partial\boldsymbol{\mu}}+\left(\frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2-s}}\right)\frac{1}{\mathbf{w}_{et}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}}\left(\frac{\partial\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w}_{et}}{\partial\boldsymbol{\mu}}-\frac{\partial R_{GMV}}{\partial\boldsymbol{\mu}}\right)=$$

$$=\left(\frac{\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w}_{et}-R_{GMV}}{\mathbf{w}_{et}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}}\right)\frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\left(z_\alpha^2-s\right)^{3/2}}\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}+\left(\frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2-s}}\right)\frac{1}{\mathbf{w}_{et}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}}\left(\mathbf{w}_{et}-\mathbf{w}_{GMV}\right), \qquad (6)$$

бо $\partial R_{GMV}/\partial\boldsymbol{\mu}=\mathbf{w}_{GMV}$, $\partial s/\partial\boldsymbol{\mu}=2\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}$, $\partial\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w}_{et}/\partial\boldsymbol{\mu}=\mathbf{w}_{et}$.

Далі,

$$\frac{\partial\beta_{VaR}}{\partial\,\mathrm{vech}(\boldsymbol{\Sigma})}=\partial\left(\frac{\mathbf{w}_{VaR}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}}{\mathbf{w}_{et}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}}\right)\Big/\partial\,\mathrm{vech}(\boldsymbol{\Sigma})$$

$$=\partial\left(\frac{V_{GMV}}{\mathbf{w}_{et}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}}\right)\Big/\partial\,\mathrm{vech}(\boldsymbol{\Sigma})+\partial\left(\frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2-s}}\frac{\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w}_{et}-R_{GMV}}{\mathbf{w}_{et}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}}\right)\Big/\partial\,\mathrm{vech}(\boldsymbol{\Sigma})=$$

$$=-\frac{V_{GMV}}{\left(\mathbf{w}_{et}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}\right)^2}\frac{\partial\left(\mathbf{w}_{et}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}\right)}{\partial\,\mathrm{vech}(\boldsymbol{\Sigma})}+\frac{1}{\mathbf{w}_{et}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}}\frac{\partial V_{GMV}}{\partial\,\mathrm{vech}(\boldsymbol{\Sigma})}+\frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2-s}}\frac{\partial\left(\dfrac{\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w}_{et}-R_{GMV}}{\mathbf{w}_{et}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}}\right)}{\partial\,\mathrm{vech}(\boldsymbol{\Sigma})}+$$

$$+\frac{\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w}_{et}-R_{GMV}}{\mathbf{w}_{et}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}}\frac{\partial\left(\dfrac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2-s}}\right)}{\partial\,\mathrm{vech}(\boldsymbol{\Sigma})}=-\frac{V_{GMV}}{\left(\mathbf{w}_{et}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}\right)^2}\frac{\partial\left(\mathbf{w}_{et}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}\right)}{\partial\,\mathrm{vech}(\boldsymbol{\Sigma})}+\frac{1}{\mathbf{w}_{et}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}}\frac{\partial V_{GMV}}{\partial\,\mathrm{vech}(\boldsymbol{\Sigma})}-$$

$$-\frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2-s}}\frac{1}{\mathbf{w}_{et}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}}\frac{\partial R_{GMV}}{\partial\,\mathrm{vech}(\boldsymbol{\Sigma})}-\frac{\sqrt{V_{GMV}}\left(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w}_{et}-R_{GMV}\right)}{\left(\mathbf{w}_{et}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}\right)^2\sqrt{z_\alpha^2-s}}\frac{\partial\left(\mathbf{w}_{et}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}\right)}{\partial\,\mathrm{vech}(\boldsymbol{\Sigma})}+$$

$$+\frac{\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w}_{et}-R_{GMV}}{\mathbf{w}_{et}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{et}}\left(\frac{1}{2\sqrt{V_{GMV}}\sqrt{z_\alpha^2-s}}\frac{\partial V_{GMV}}{\partial\,\mathrm{vech}(\boldsymbol{\Sigma})}+\frac{\sqrt{V_{GMV}}}{2\left(z_\alpha^2-s\right)^{3/2}}\frac{\partial s}{\partial\,\mathrm{vech}(\boldsymbol{\Sigma})}\right).$$

Оскільки

$$\frac{\partial\left(\mathbf{w}'_{et}\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}_{et}\right)}{\partial\,\mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma})}=\mathbf{D}'_k\left(\mathbf{w}_{et}\otimes\mathbf{w}_{et}\right),$$

$$\frac{\partial V_{GMV}}{\partial\,\mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma})}=\frac{\partial(\mathrm{vec}(\mathbf{\Sigma}^{-1}))'}{\partial\mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma})}\left(-V^2_{GMV}(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})\right),$$

$$\frac{\partial R_{GMV}}{\partial\,\mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma})}=\frac{\partial(\mathrm{vec}(\mathbf{\Sigma}^{-1}))'}{\partial\mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma})}\left(V_{GMV}(\mathbf{1}\otimes\boldsymbol{\mu})-R_{GMV}V_{GMV}(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})\right),$$

$$\frac{\partial s}{\partial\,\mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma})}=\frac{\partial(\mathrm{vec}(\mathbf{\Sigma}^{-1}))'}{\partial\mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma})}\left((\boldsymbol{\mu}\otimes\boldsymbol{\mu})-2R_{GMV}(\mathbf{1}\otimes\boldsymbol{\mu})+R^2_{GMV}(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})\right),$$

$$\frac{\partial(\mathrm{vec}(\mathbf{\Sigma}^{-1}))'}{\partial\mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma})}=-\mathbf{D}'_k\left(\mathbf{\Sigma}^{-1}\otimes\mathbf{\Sigma}^{-1}\right)\mathbf{D}^{+\,\prime}_k\,\mathbf{D}'_k,$$

то отримуємо

$$\frac{\partial\beta_{VaR}}{\partial\,\mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma})}=-\frac{V_{GMV}}{\left(\mathbf{w}'_{et}\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}_{et}\right)^2}\mathbf{D}'_k\left(\mathbf{w}_{et}\otimes\mathbf{w}_{et}\right)-\frac{V^2_{GMV}}{\mathbf{w}'_{et}\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}_{et}}\frac{\partial(\mathrm{vec}(\mathbf{\Sigma}^{-1}))'}{\partial\mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma})}(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})-$$

$$-\frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z^2_\alpha-s}}\left(\frac{1}{\mathbf{w}'_{et}\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}_{et}}\frac{\partial(\mathrm{vec}(\mathbf{\Sigma}^{-1}))'}{\partial\mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma})}\left(V_{GMV}(\mathbf{1}\otimes\boldsymbol{\mu})-R_{GMV}V_{GMV}(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\left(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w}_{et}-R_{GMV}\right)}{\left(\mathbf{w}'_{et}\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}_{et}\right)^2}\mathbf{D}'_k\left(\mathbf{w}_{et}\otimes\mathbf{w}_{et}\right)\right)+$$

$$+\frac{\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w}_{et}-R_{GMV}}{\mathbf{w}'_{et}\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}_{et}}\frac{\partial(\mathrm{vec}(\mathbf{\Sigma}^{-1}))'}{\partial\mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma})}\left(-\frac{V^2_{GMV}}{2\sqrt{V_{GMV}}\sqrt{z^2_\alpha-s}}(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{V_{GMV}}}{2\left(z^2_\alpha-s\right)^{3/2}}\left((\boldsymbol{\mu}\otimes\boldsymbol{\mu})-2R_{GMV}(\mathbf{1}\otimes\boldsymbol{\mu})+R^2_{GMV}(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})\right)\right). \tag{7}$$

Врахувавши вигляд асимптотичної коваріаційної матриці $\mathbf{\Omega}$ (див. (5)) випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta})$, маємо

$$\mathbf{G}'\mathbf{\Omega}\mathbf{G}=(\partial\beta_{VaR}/\partial\boldsymbol{\mu})'\mathbf{\Sigma}(\partial\beta_{VaR}/\partial\boldsymbol{\mu})+$$

$$+(\partial\beta_{VaR}/\partial\mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma}))'\,\mathbf{D}^+_k\left(\mathbf{I}_{k^2}+\mathbf{K}_k\right)(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{\Sigma})\mathbf{D}^{+\,\prime}_k\,(\partial\beta_{VaR}/\partial\mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma})).$$

Підсумуємо отриманий результат у вигляді теореми.

Теорема 1. *Нехай портфелі: еталонний зі сталими вагами та портфель інвестора з найменшим рівнем VaR сформовані з однакових k активів, вектор* $\mathbf{X}_t$ *дохідностей яких має k-вимірний нормальний розподіл з параметрами* $\boldsymbol{\mu}$ *та* $\mathbf{\Sigma}$, тобто $\mathbf{X}_t \sim N_k(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma})$ *та його реалізації неавтокорельовані. Тоді*

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_{VaR}-\beta_{VaR})\xrightarrow{d}N(0,\sigma^2),\ n\to+\infty,$$

де

$$\sigma^2=(\partial\beta_{VaR}/\partial\boldsymbol{\mu})'\mathbf{\Sigma}(\partial\beta_{VaR}/\partial\boldsymbol{\mu})+(\partial\beta_{VaR}/\partial\mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma}))'\,\mathbf{D}^+_k\left(\mathbf{I}_{k^2}+\mathbf{K}_k\right)(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{\Sigma})\mathbf{D}^{+\,\prime}_k$$

$$(\partial\beta_{VaR}/\partial\mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma})),$$

а похідні $\partial\beta_{VaR}/\partial\boldsymbol{\mu}$ *та* $\partial\beta_{VaR}/\partial\mathrm{vech}(\mathbf{\Sigma})$ *визначаються співвідношеннями (6) та (7).*

Зауваження 1. Асимптотична дисперсія випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{VaR}-\beta_{VaR})$ залежить від невідомих параметрів розподілу вектора дохідностей активів $\boldsymbol{\mu}$ та $\mathbf{\Sigma}$, а тому на практиці потрібно використовувати оцінку цієї дисперсії. Оскільки ми використовуємо асимптотичні результати, то, за теоремою 1.14 з [17, с. 8], отримуємо консистентність вибіркової оцінки асимптотичної дисперсії, отже, її використання на практиці повністю коректне.

Зауваження 2. Портфель фінансових активів із найменшим рівнем VaR може бути сформований тоді і лише тоді, якщо $s < z_{\alpha}^{2}$. Із останньої нерівності не завжди випливає, що $\hat{s} < z_{\alpha}^{2}$. У [6] доведено, що асимптотично умова $\hat{s} < z_{\alpha}^{2}$ виконується з імовірністю 1, якщо $s < z_{\alpha}^{2}$.

На основі теореми 1 можна побудувати (1–*γ*) інтервал довіри для β_{VaR},

$$I_{1-\gamma} = \left[\hat{\beta}_{VaR} - \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} z_{1-\gamma/2}, \hat{\beta}_{VaR} + \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} z_{1-\gamma/2} \right],$$

де z_{γ} є *γ* квантиль стандартного нормального розподілу, $\hat{\sigma}$ – вибіркова оцінка асимптотичної дисперсії *σ*. Якщо деяке значення β_0 належить інтервалу $I_{1-\gamma}$, то значення бета-коефіцієнта β_{VaR} за рівня значущості *γ* істотно не відрізняються від β_0, інакше – відмінність буде суттєвою. Аналогічно можемо побудувати односторонні (1–*γ*) інтервали довіри для β_{VaR}

$$\left(-\infty, \hat{\beta}_{VaR} + \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} z_{1-\gamma} \right], \left[\hat{\beta}_{VaR} - \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} z_{1-\gamma}, +\infty \right)$$

та на їх основі перевірити гіпотези $\beta_{VaR} > \beta_0$ та $\beta_{VaR} < \beta_0$.

Асимптотичні результати не можна безумовно використовувати на практиці. Передусім необхідно дослідити якість цих результатів. А саме: за якого обсягу вибірки історичних значень *n* досягається потрібний рівень наближення емпіричних розподілів випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{VaR} - \beta_{VaR})$ до асимптотичного розподілу, знайденого в теоремі 1. Для цього виберемо кількість *k* активів у портфелі та припустимо, що нам відомі точні значення параметрів розподілу **μ** та **Σ**. На їх основі обчислимо точне значення для β_{VaR}. Далі виберемо обсяг вибірки історичних значень *n* та згенеруємо цю вибірку з *k*-вимірного нормального розподілу з параметрами **μ** та **Σ**. На основі цієї вибірки побудуємо вибіркові оцінки параметрів **μ**, **Σ** та β_{VaR}. Обчислимо значення $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{VaR} - \beta_{VaR})$. Повторимо цю процедуру, наприклад, 100000 разів та на основі отриманих значень $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{VaR} - \beta_{VaR})$ побудуємо оцінку густини розподілу цієї випадкової величини (емпіричну густину) та порівняємо її з асимптотичною. Також перевіримо на скільки відхиляються середнє значення та дисперсія оцінені на основі отриманих вибірок від відповідних асимптотичних значень.

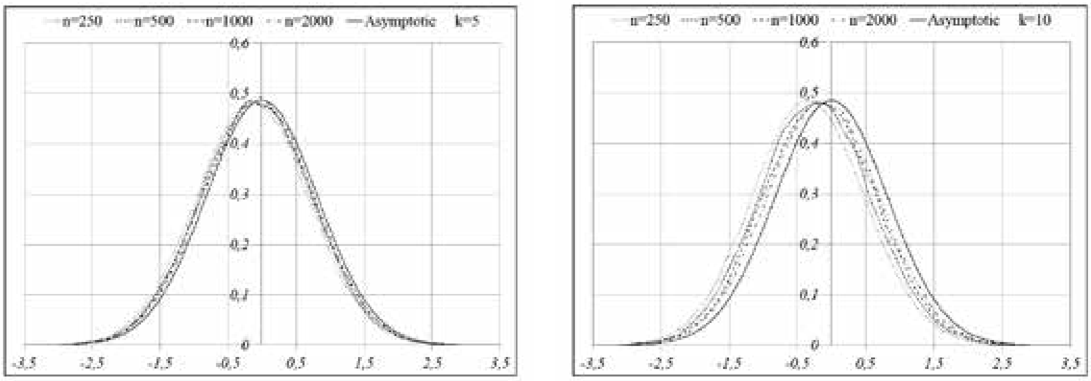

Рис. 1. Емпіричні *n*={250, 500, 1000, 2000} та асимптотична густини випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{VaR} - \beta_{VaR})$, якщо *k*=5 (зліва) та *k*=10 (справа)

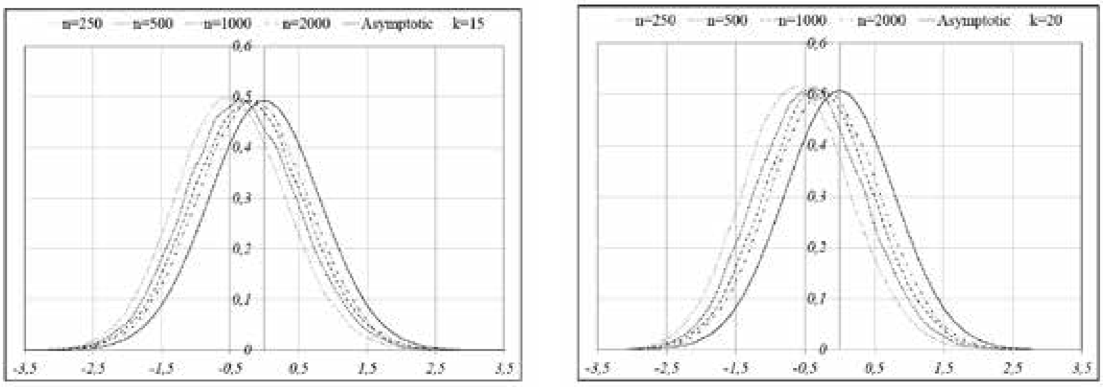

Рис. 2. Емпіричні *n*={250, 500, 1000, 2000} та асимптотична густини випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{VaR} - \beta_{VaR})$, якщо *k*=15 (зліва) та *k*=20 (справа)

Точні значення для параметрів розподілу вектора дохідностей активів оберемо як вибіркові оцінки отримані з вибірки щоденних дохідностей акцій, включених до переліку Dow Jones за період із 01.07.2020 до 11.01.2022 (386 спостережень). За еталонний портфель візьмемо портфель із однаковими вагами, тобто $\mathbf{w}_{et}=(1/k, \ldots, 1/k)'$. Для кількості активів у портфелі виберемо значення $k=\{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$, тобто сформуємо 6 портфелів із найменшим рівнем VaR з k перших акцій із переліку Dow Jones відсортованого в алфавітному порядку. Для рівня довіри до VaR оберемо значення 0.95. Порівняємо емпіричні розподіли з асимптотичним, якщо $n=\{250, 500, 1000, 2000\}$. Результати представлені на рис. 1-3. Бачимо, що, зі зростанням кількості активів у портфелі, швидкість збіжності емпіричних густин до асимптотичної зменшується. Також існує суттєве відхилення емпіричних середніх значень від відповідних асимптотичних. Цей висновок також підтверджується результатами порівнянь емпіричних середніх значень та дисперсій із відповідними асимптотичними значеннями представленими в табл. 1.

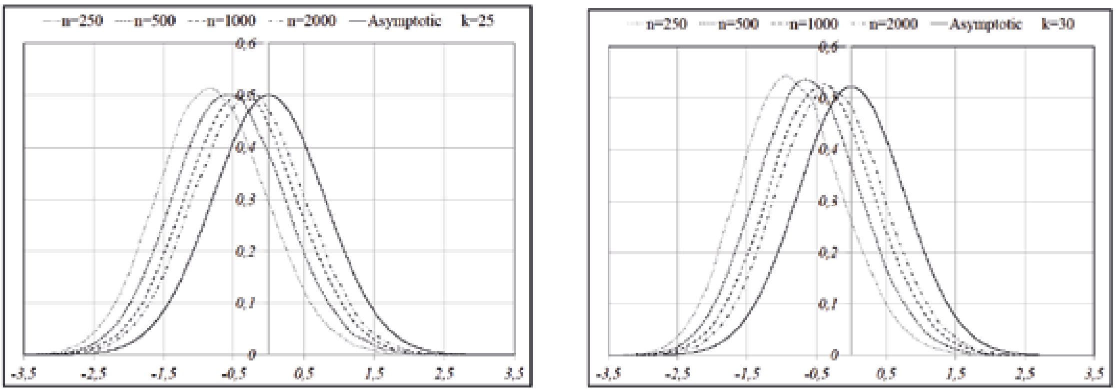

Рис. 3. Емпіричні n={250, 500, 1000, 2000} та асимптотична густини випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{VaR}-\beta_{VaR})$, якщо k=25 (зліва) та k=30 (справа)

Зважаючи на отримані результати, побудуємо скореговану оцінку параметра β_{VaR}. Розглянемо перший доданок у (4), $\hat{V}_{GMV} / \mathbf{w}_{et}'\hat{\Sigma}\mathbf{w}_{et}$. У [10] розглянуто скореговану оцінку цієї випадкової величини виду $(n-3)\hat{V}_{GMV} / \left((n-k)\mathbf{w}_{et}'\hat{\Sigma}\mathbf{w}_{et}\right)$ та показано суттєве покращання збіжності емпіричних середніх значень до відповідних асимптотичних. Розглянемо скореговану оцінку параметра β_{VaR} виду:

$$\hat{\beta}_{VaR}^{*}=(n-3)\hat{V}_{GMV} / \left((n-k)\mathbf{w}_{et}'\hat{\Sigma}\mathbf{w}_{et}\right)+\left(\hat{\mu}'\mathbf{w}_{et}-\hat{R}_{GMV}\right)\sqrt{\hat{V}_{GMV}} / \left(\mathbf{w}_{et}'\Sigma'\mathbf{w}_{et}\sqrt{z_{\alpha}^{2}-\hat{s}}\right),$$

та дослідимо швидкість збіжності емпіричних густин випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{VaR}^{*}-\beta_{VaR})$ до асимптотичної за аналогічною схемою, яку використано для дослідження випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{VaR}-\beta_{VaR})$.

Таблиця 1

Емпіричні $n \in$ { 250, 500, 1000, 2000} та асимптотичні середні значення та дисперсії випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{VaR}-\beta_{VaR})$, якщо $k \in$ {5, 10, 15, 20, 25, 30} у випадку еталонного портфеля з однаковими вагами

		n=120	n=250	n=500	n=1000	n=2000	Асимптотичні
k=5	Середнє	–0,2076	–0,1426	–0,0967	–0,0693	–0,0531	0
	Дисперсія	0,6636	0,6750	0,6679	0,6766	0,6679	0,6722
k=10	Середнє	–0,4880	–0,3332	–0,2383	–0,1700	–0,1167	0
	Дисперсія	0,6563	0,6699	0,6706	0,6710	0,6775	0,6757
k=15	Середнє	–0,7060	–0,4864	–0,3365	–0,2421	–0,1689	0
	Дисперсія	0,6144	0,6315	0,6508	0,6557	0,6526	0,6572
k=20	Середнє	–0,8819	–0,6031	–0,4245	–0,2999	–0,2087	0
	Дисперсія	0,5543	0,5883	0,6009	0,6150	0,6175	0,6204
k=25	Середнє	–1,1596	–0,7965	–0,5620	–0,3916	–0,2763	0
	Дисперсія	0,5530	0,5959	0,6174	0,6272	0,6295	0,6344
k=30	Середнє	–1,2425	–0,8551	–0,6079	–0,4230	–0,2965	0
	Дисперсія	0,4854	0,5348	0,5559	0,5735	0,5761	0,5821

Результати аналізу представлені на рис. 4-6 та в табл. 2. Зауважимо, що результати отримані для скоригованої оцінки $\hat{\beta}_{VaR}^{*}$ є кращими, ніж для звичайної вибіркової $\hat{\beta}_{VaR}$, зокрема для скоригованої оцінки практично відсутнє зміщення навіть, якщо обсяг вибірки n=120.

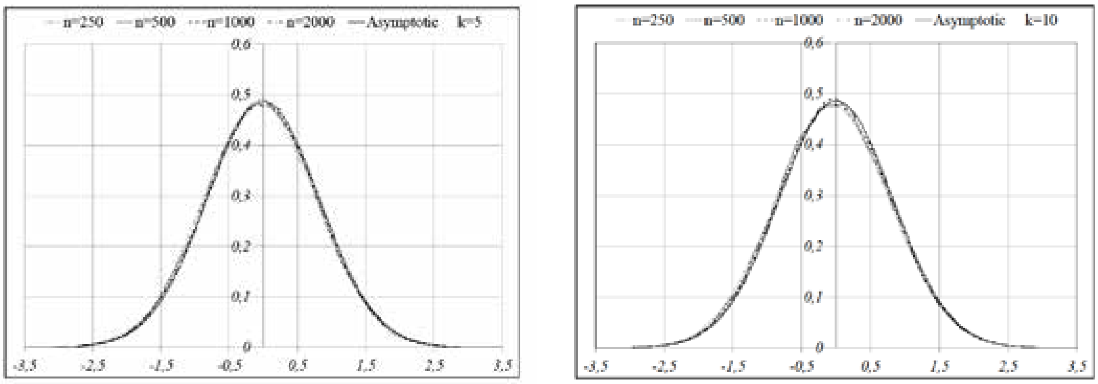

Рис. 4. Емпіричні *n*={250, 500, 1000, 2000} та асимптотична густини випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\beta}^{*}_{VaR}-\beta_{VaR})$, якщо *k*=5 (зліва) та *k*=10 (справа)

Застосуємо отримані результати для перевірки статистичної гіпотези H_0: $\beta_{VaR} = 1$ проти H_1: $\beta_{VaR} \neq 1$ для 6 портфелів фінансових активів із найменшим рівнем VaR (якщо рівень довіри α=0.95), а k = {5, 10, 15, 20, 25, 30} перших акцій із переліку Dow Jones відсортованого в алфавітному порядку, а за еталонний портфель візьмемо портфель із однаковими вагами.

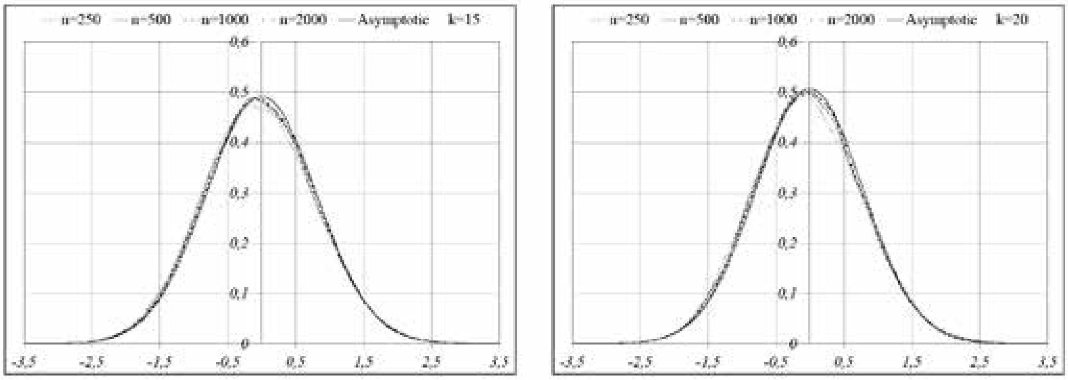

Рис. 5. Емпіричні *n*={250, 500, 1000, 2000} та асимптотична густини випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\beta}^{*}_{VaR}-\beta_{VaR})$, якщо *k*=15 (зліва) та *k*=20 (справа)

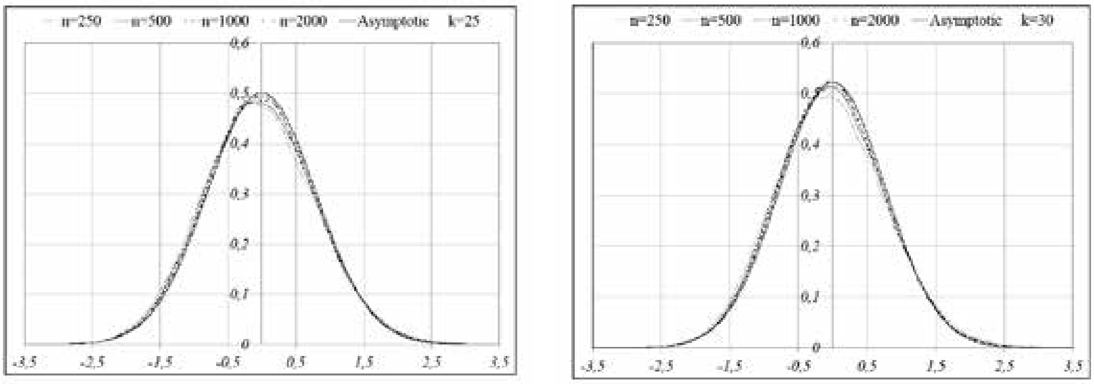

Рис. 6. Емпіричні *n*={250, 500, 1000, 2000} та асимптотична густини випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\beta}^{*}_{VaR}-\beta_{VaR})$, якщо *k*=25 (зліва) та *k*=30 (справа)

Використаємо для цього двосторонній асимптотичний інтервал довіри для $\beta_{VaR,}$ побудований на основі скорегованої оцінки $\hat{\beta}^{*}_{VaR}$. Розглянемо щоденні дохідності акцій, включених до переліку Dow Jones за період із 22.03.2020 до 11.01.2022 (709 спостережень). Використовуючи метод біжучого вікна з n = 580 спостережень для оцінки $\hat{\beta}^{*}_{VaR}$ та асимптотичної дисперсії випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\beta}^{*}_{VaR}-\beta_{VaR})$, побудуємо інтервали довіри для β_{VaR} за період із 12.07.2020 до 12.01.2022 та зобразимо їх графічно. Із рис. 7 видно, що жоден із побудованих інтервалів довіри не містить одиниці. Отже, можемо відхилити гіпотезу H_0 та прийняти альтернативну гіпотезу H_1, тобто зробити висновок, що хоча й дохідність обох портфелів змінюється в одному напрямку, проте портфелі не є еквівалентними.

Таблиця 2

Емпіричні $n \in \{250, 500, 1000, 2000\}$ та асимптотичні середні значення та дисперсії випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\beta}^{*}_{VaR} - \beta_{VaR})$ для $k \in \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$ у випадку еталонного портфеля з однаковими вагами

		n=120	n=250	n=500	n=1000	n=2000	Асимптотичні
k=5	Середнє	–0,0859	–0,0602	–0,0377	–0,0270	–0,0219	0
	Дисперсія	0,6831	0,6794	0,6711	0,6754	0,6736	0,6722
k=10	Середнє	–0,0739	–0,0526	–0,0385	–0,0225	–0,0191	0
	Дисперсія	0,7256	0,6970	0,6849	0,6775	0,6779	0,6757
k=15	Середнє	–0,0656	–0,0442	–0,0326	–0,0234	–0,0125	0
	Дисперсія	0,7398	0,6933	0,6729	0,6685	0,6658	0,6572
k=20	Середнє	–0,0542	–0,0341	–0,0271	–0,0191	–0,0141	0
	Дисперсія	0,7215	0,6651	0,6409	0,6271	0,6275	0,6204
k=25	Середнє	–0,0588	–0,0433	–0,0288	–0,0221	–0,0108	0
	Дисперсія	0,7780	0,6965	0,6665	0,6491	0,6451	0,6344
k=30	Середнє	–0,0542	–0,0338	–0,0237	–0,0165	–0,0133	0
	Дисперсія	0,7410	0,6481	0,6080	0,5956	0,5857	0,5821

Висновки. У роботі досліджено властивості вибіркової оцінки бета-коефіцієнта β_{VaR} портфеля з найменшим рівнем VaR у випадку, коли еталонний портфель є портфелем зі сталими вагами.

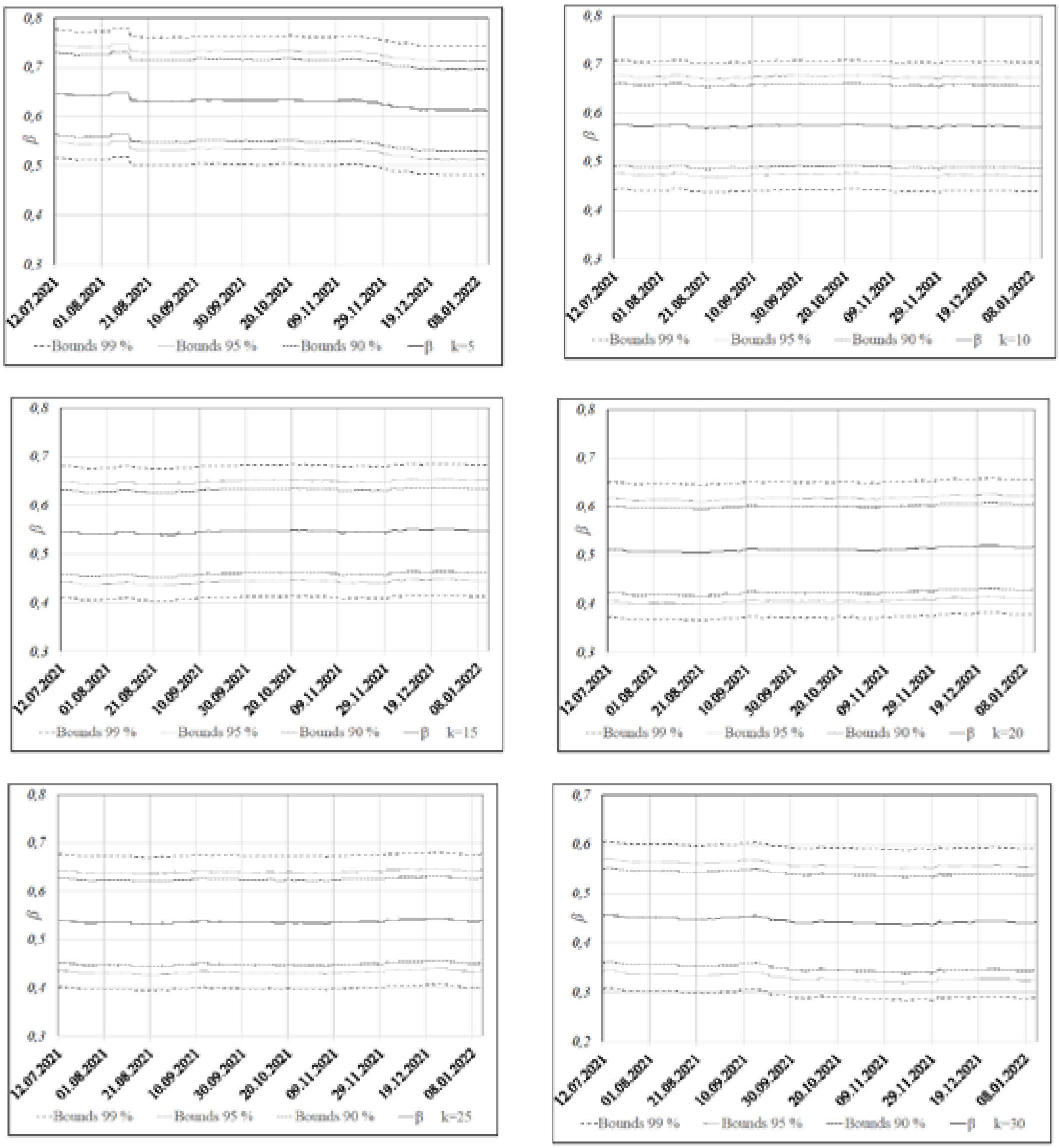

Рис. 7. Двосторонні інтервали довіри параметра β_{VaR} за період з 12.07.2020 до 12.01.2022, отримані методом біжучого вікна з n = 580 спостережень для портфелів фінансових активів із найменшим рівнем VaR (α=0.95) з k=5 (вверху зліва), k=10 (вверху справа), k=15 (по центру зліва), k=20 (по центру справа), k=25 (внизу зліва), k=30 (внизу справа) фінансових активів.

Знайдено асимптотичний розподіл вибіркової оцінки β_{VaR} за припущення, що вектор дохідностей активів портфелів має нормальний розподіл, а його реалізації неавтокорельовані. Для випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{VaR} - \beta_{VaR})$ досліджено швидкість збіжності емпіричних густин до асимптотичної для портфелів, які складаються з k={5, 10, 15, 20, 25, 30}, причому за еталонний портфель обрано портфель із однаковими вагами. Отримано, що зі зростанням кількості активів у портфелі зростає відхилення емпіричних середніх значень від відповідних асимптотичних. Так, наприклад, якщо k=15 та n=2000 емпіричне середнє значення становить –0,1689, а якщо k=30 та n=2000 – –0,2965 (тоді як асимптотичне середнє в обох випадках дорівнює 0). Натомість, збіжність емпіричних дисперсій до асимптотичної є доволі швидкою: якщо k=15 та n=500 емпірична дисперсія становить 0,6508, а асимптотична – 0,6572; якщо k=30 та n=500, емпірична дисперсія дорівнює 0,5559, а асимптотична – 0,5821.

В роботі побудовано скореговану оцінку параметра β_{VaR}. Показано, що властивості скорегованої оцінки є кращими ніж простої вибіркової, зокрема навіть, якщо n=120 для k=15 емпіричне середнє значення становить –0,0656, а якщо k=30 – –0,0542. Отже, доцільніше на практиці використовувати скореговану оцінку замість звичайної вибіркової оцінки.

Література:

1. Okhrin Y., Schmid W. (2006). Distributional properties of optimal portfolio weights. *Journal of econometrics*. № 134. P. 235 – 256.

2. Bodnar T., Gupta A. K. (2009). Construction and Inferences of the Efficient Frontier in Elliptical Models, Journal of the Japan Statistical Society, № 39, P. 193-207.

3. Bodnar T., Zabolotskyy T. (2008). Distributions of the weights of sample optimal portfolios in multivariate conditionally heteroscedastic elliptical models. Journal of money, investment and banking. №1. P. 5 – 23.

4. Bodnar T., Zabolotskyy T. (2010). Sample efficient frontier in multivariate conditionally heteroscedastic elliptical models. *Statistics*. Vol. 44, № 1. P. 1-15.

5. Bodnar T., Schmid W., Zabolotskyy T. (2012). Minimum VaR and Minimum CVaR optimal portfolios: estimators, confidence regions, and tests. *Statistics & Risk Modeling*. № 29. P. 281-314.

6. Bodnar T., Schmid W., Zabolotskyy T. (2013). Asymptotic behavior of the estimated weights and of the estimated performance measures of the minimum VaR and the minimum CVaR optimal portfolios for dependent data. *Metrica*. № 76. P. 1105–1134.

7. Zabolotskyy T., Bodnar T., Vitlinskyy V. (2012). Portfolio choice problem with the Value-at-Risk utility function under general linear constraints. *Economic cybernetics*. № 4-6 (76-78). P. 4-11.

8. Bodnar T., Gupta A. K., Vitlinskyy V., Zabolotskyy T. (2019). Statistical inference for the β coefficient. *Risks*. № 7 (2). 56.

9. Заболоцький М. В., Заболоцький Т. М., Петришин М. Ю. (2021). Моделювання вибіркової оцінки бета-коефіцієнта портфеля зі сталими вагами за наявності автокореляції дохідностей активів. *Вісник Львівського університету, серія економічна*. №. 60. С. 66-75.

Zabolotskyy M. V., Zabolotskyy T. M., Petryshyn M. Y. (2021). Modelyuvannya vybirkovoyi otsinky beta-koefitsiyenta portfelya zi stalymy vahamy za nayavnosti avtokorelyatsiyi dokhidnostey aktyviv [Modeling the sample estimator of the beta-coefficient of the constant weights portfolio under autocorrelation of the asset returns]. Visnyk Lvivskoho universytetu, seriya ekonomichna. №. 60. 66-75. [in Ukrainian]

10. Yaroshko S. M., Zabolotskyy M. V., Zabolotskyy T. M. (2021). Properties of the beta coefficient of the global minimum variance portfolio. *Mathematical modeling and computing*. Vol. 8, № 1. P. 11–21.

11. Заболоцький М. В., Заболоцький Т. М. (2019). Емпіричний аналіз бета коефіцієнта портфеля з максимальним відношенням Шарпа. *Вісник Львівського університету, серія економічна*. № 57. С. 18-29.

Zabolotskyy M. V., Zabolotskyy T. M. (2019). Empirychnyy analiz beta koefitsiyenta portfelya z maksymal'nym vidnoshennyam Sharpa [Empirical analysis of beta coefficient of the optimal portfolio with the maximum Sharpe ratio]. Visnyk Lvivskoho universytetu, seriya ekonomichna. № 57. 18-29. [in Ukrainian]

12. Alexander G. J., Baptista M. A. (2002). Economic implication of using a mean-VaR model for portfolio selection: a comparison with mean-variance analysis. *Journal of economic dynamics & control*. № 26. P. 1159–1193.

13. Ling S., McAleer M. (2003). Asymptotic theory for a vector ARMA-GARCH model. *Econometric theory*. № 19. P. 280 – 310.

14. Brockwell P. J., Davis R. A. (2006). Time series: theory and methods. New York : Springer Science+Business Media. 600 p.

15. Harville D. A. (2008). Matrix algebra from a statistician's perspective. New York : Springer Science+Business Media. 634 p.

16. Magnus J. R., Neudecker H. (1999). Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics. New York : Wiley. 450 p.

17. DasGupta A. (2008). Asymptotic theory of statistics and probability. New York : Springer. 722 p.