Отримано: 15 серпня 2022 р.

Прорецензовано: 29 серпня 2022 р.

Прийнято до друку: 01 вересня 2022 р.

e-mail: yuriy.kotsyuk@oa.edu.ua

DOI: 10.25264/2311-5149-2022-26(54)-121-131

Нікітін А. В., Коцюк Ю. А., Савчук О. В. Застосування стохастичних еволюційних рівнянь з марковськими переключеннями у некласничних схемах апроксимації для побудови та аналізу моделі інформаційної боротьби. *Наукові записки Національного університету «Острозька академія». Серія «Економіка» : науковий журнал.* Острог : Вид-во НаУОА, вересень 2022. № 26(54). С. 121–131.

УДК: 519.217.1

JEL-класифікація: C220

ORCID-ідентифікатор: 0000-0001-5137-0114

ORCID-ідентифікатор: 0000-0002-6078-6880

ORCID-ідентифікатор: 0000-0002-3792-1722

Нікітін Анатолій Володимирович,
доктор фізико-математичних наук, професор,
Національний університет «Острозька академія»

Коцюк Юрій Анатолійович,
кандидат психологічних наук, старший викладач,
Національний університет «Острозька академія»

Савчук Олександр Васильович,
аспірант,
Національний університет «Острозька академія»

ЗАСТОСУВАННЯ СТОХАСТИЧНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ З МАРКОВСЬКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕННЯМИ У НЕКЛАСНИЧНИХ СХЕМАХ АПРОКСИМАЦІЇ ДЛЯ ПОБУДОВИ ТА АНАЛІЗУ МОДЕЛІ ІНФОРМАЦІЙНОЇ БОРОТЬБИ

У роботі досліджено особливості побудови та проаналізовано модель інформаційної боротьби, описану стохастичним диференціальним рівнянням з марковськими перемиканнями та процесом імпульсного збурення. Нову модель інтерпретовано як вплив рідкісних подій, які швидко змінюють певне сприйняття великої кількості людей. Як результат, число прихильників різних ідей робить стохастичні стрибки, які можна побачити, використовуючи некласичні схеми апроксимації.

Ключові слова: *випадкова еволюція, марковські перемикання, модель інформаційної боротьби, умови апроксимації Леві й Пуассона.*

Anatolii Nikitin,
Dr.Sc. (in Physics & Mathematics), Professor (Full),
The National University of Ostroh Academy

Yurii Kotsiuk,
Cand.Sc. (Psychology), senior lecturer,
The National University of Ostroh Academy

Oleksandr Savchuk,
postgraduate student,
The National University of Ostroh Academy

APPLYING STOCHASTIC EVOLUTIONARY EQUATIONS WITH MARKOV-SWITCHING MODELS IN NON-CLASSICAL APPROXIMATION SCHEMES TO CONSTRUCT AND ANALYSE THE INFORMATION STRUGGLE MODEL

Analysis of the state of the art asymptotic properties of stochastic evolution models reveals that a complete theory is still to be worked out. Well understood are the deterministic models and stochastic ones which are given by differential equations, in particular with Markov switchings and perturbations in the classical schemes of averaging or diffusion approximation. Thus, it seems natural to develop a theory of evolution equations with Markov switchings and random perturbations in nonclassical approximation schemes.

We consider stochastic equations with Markov switchings and impulse perturbations under the conditions of Levy and Poisson approximation.

The results obtained in the present research may be divided into two parts. In the first part, we consider some prelimit evolution models with a small normalization parameter. We find the form of the limit generators for the impulse processes and the dynamical system in the schemes of the Poisson approximation and the Levy approximation. It is important that in this part of the thesis the asymptotic behavior of the limit process is concluded with the help of the analysis of parameters of the prelimit system.

ISSN 2311-5149

Further, in the second part we explore, analyze and provide the peculiarities of constructing the information struggle model described by such stochastic evolution. The new pattern is decoded as the effect of rare events quickly changing certain perceptions of a large number of people. As a result, the number of supporters of different ideas makes stochastic jumps, which one can see using non-classical approximation schemes.
Keywords: *random evolution, Markov-switching models, information struggle model, Lévy and Poisson approximations.*

Постановка проблеми. Випадкова еволюція у формі стохастичного диференціального рівняння використовується для опису широкого класу природних процесів у найрізноманітніших галузях науки. Важливим випадком є вивчення поведінки таких еволюційних систем у випадковому середовищі, яке добре моделюється за допомогою марковських процесів.

Запропоновані в роботі результати є, з одного боку, описом теоретичних засад вивчення властивостей стохастичних еволюційних систем в умовах некласичних схем апроксимації, а з іншого – демонстрацією можливості дослідження реальних процесів, які відбуваються в соціальних спільнотах. Зокрема, за допомогою стохастичної еволюційної системи ми будуємо та здійснюємо аналіз моделі інформаційної боротьби з урахуванням різного роду випадкових факторів.

Аналіз крайніх досліджень та публікацій. Вивченню еволюційних систем у вигляді стохастичних диференціальних рівнянь присвячена велика кількість робіт відомих вчених, серед яких М. М. Боголюбов, Й. І. Гіхман, А. В. Скороход та інші. Детальну бібліографію з цього питання можна знайти, наприклад, у монографіях В. С. Королюка [2], зокрема, у [7] були започатковані підходи, які використовуються в цій статті для вивчення асимптотичної поведінки еволюційної системи з дифузійним збуренням. У першій частині цієї роботи ми розглянемо випадок, коли збурення системи визначаються імпульсним процесом в некласичних схемах апроксимації (докладніше див. [9; 10; 11 12; 14; 15; 16]). Передусім, важливим є питання асимптотичної поведінки граничних генераторів. Подібні проблеми розглядалися і раніше з використанням якісно різних методів (наприклад, див. [17]). Запропоновані в нашій роботі методи дозволяють дослідити модель, яка містить марковські перемикання, що відповідають випадковому середовищу, а також виділити додаткову дифузійну складову і великі стрибки процесу збурення у граничному рівнянні.

У другій частині статті описується конфліктна взаємодія складної системи з нетривіальною внутрішньою структурою. Модель визначається стохастичним диференціальним рівнянням з марковськими перемиканнями і процесом імпульсного збурення у некласичній схемі апроксимації. Модель взаємодії Лотки-Вольтерри «хижак – жертва» є однією з основних моделей симуляції багатьох процесів в прикладній науці [1; 3; 4; 5; 6; 8; 18]. Застосування такого підходу до моделі інформаційної війни запропоновано в [13]. Автори розглядають деяку соціальну спільноту кількістю N_0, що потенційно піддається певній інформаційній загрозі двох типів, тобто, наприклад, загрозі негативної зміни її стану шляхом передачі деякої інформації двома різними каналами. Значення $N_1(t)$, $N_2(t)$ – це кількість «прихильників» в залежності від часу, які прийняли нову інформацію, ідеї, норми і т.д. типу 1 і 2 відповідно. У представленій статті надано більш природне узагальнення моделі, у явній формі побудовано генератор для граничного процесу і запропоновано інтерпретацію моделі.

Мета і завдання дослідження: розвинути асимптотичну теорію для випадкових еволюцій – розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь, зокрема тих, які перебувають під дією імпульсних збурень та з використанням некласичних схем апроксимації.

Завданням дослідження є створення та аналіз стохастичної моделі інформаційної боротьби, яка є природним узагальненням класичної моделі.

Виклад основного матеріалу. У цьому розділі ми досліджуємо випадок, коли збурення системи визначаються імпульсним процесом за некласичною схемою апроксимації Леві і приділяємо особливу увагу асимптотичній поведінці генератора для цієї системи.

Стохастична еволюційна система в ергодичному марковському середовищі визначається стохастичним диференційним рівнянням

$$du^{\varepsilon}(t) = C(u^{\varepsilon}, x(t/\varepsilon^2))dt + d\eta^{\varepsilon}(t),\ u^{\varepsilon}(t) \in \mathbb{R} \tag{1}$$

де рівномірно ергодичний марковський процес $x(t)$ у стандартному фазовому просторі $(X, \boldsymbol{X})$ визначається генератором

$$\boldsymbol{Q}\varphi(x) = q(x)\int_X P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)]$$

у банаховому просторі $B(X)$ дійснозначних обмежених функцій $\varphi(x)$ з супремум нормою $|\varphi\| = \max_{x\in X}|\varphi(x)|$ ·

Стохастичне ядро $P(x,B), x \in X,\ B \in \boldsymbol{X}$ визначає рівномірно ергодичний вбудований марковський ланцюг $x_n = x(\tau_n),\ n \geq 0$, зі стаціонарним розподілом $\rho(B),\ B \in \boldsymbol{X}$. Стаціонарний розподіл $\pi(B),\ B \in \boldsymbol{X}$ марковських процесів $x(t),\ t \geq 0$ визначається відношенням

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx), q = \int_X \pi(dx)q(x)$$

Нехай R_0 – потенційний оператор генератора $\mathbf{Q}$, що визначається рівністю [2]

$$\mathrm{R}_0 = \Pi - (\Pi + \mathbf{Q})^{-1},$$

де $\Pi\varphi(x) = \int_X \pi(dy)\phi(y)1(x)$ проектор нулів генератором $\mathbf{Q}$ на підпростір $\mathrm{N}_{\mathrm{Q}} = \varphi\colon \boldsymbol{Q}_{\varphi} = 0$.

Імпульсний процес збурення (IPP) $\eta^{\varepsilon}(t), t \geq 0$, за схемою апроксимації Леві визначається співвідношенням

$$\gamma^{\varepsilon}(t) = \int_0^t \eta^{\varepsilon}(\mathrm{d}s, x(s/\varepsilon^2)) \tag{2}$$

де множина процесів з незалежними приростами $\eta_{\varepsilon}(\mathrm{t},\mathrm{x}),\ \mathrm{t} \geq 0,\ \mathrm{x} \in X$, визначається генераторами

$$(x)\varphi(w) = \varepsilon^2 \int_R \left(\varphi(w+v) - \varphi(w)\right)\Gamma^{\varepsilon}(dv,x), x \in \tag{3}$$

і задовольняє властивості апроксимації Леві [2]

L1. Апроксимація середніх

$$\int_R v\Gamma^{\varepsilon}(dv,x) = \varepsilon a_1(x) + \varepsilon^2\left(a_2(x) + \theta_a(x)\right), \theta_a(x) \to 0, \varepsilon \to 0,$$

і

$$\int_R v^2\Gamma^{\varepsilon}(dv,x) = \varepsilon\left(b(x) + \theta_b(x)\right), \theta_b(x) \to 0, \varepsilon \to 0,$$

L2. Умова на функцію розподілу

$$\int_R g(v)\Gamma^{\varepsilon}(dv,x) = \varepsilon^2\left(\Gamma_g(x) + \theta_g(x)\right), \theta_g(x) \to 0, \varepsilon \to 0,$$

для усіх $g(v) \in C^2(\mathbb{R})$ (простір реальних обмежених функцій, таких як $g(v)/|v|^2 \to 0, |v| \to 0)$, де міра $\Gamma_g(x)$ обмежена для всіх $g(v) \in C^2(\mathbb{R})$і визначається співввідношенням (функції з простору $C^2(\mathbb{R})$ розділяють міру):

$$\Gamma_g(x) = \int_R g(v)\Gamma_0(dv,x), g(v) \in C^3(\mathbb{R});$$

L3. Рівномірна квадратична інтегрованість

$$\sup \lim_{c\to\infty} \int_{|v|>c} v^2\Gamma_0(dv,x) = 0;$$

Припускаючи, що виконана умова балансу

$$\hat{a}_1 := \int_X \pi(dx)a_1(x) = 0, \tag{4}$$

розглянемо асимптотичні властивості процесу збурень.

Теорема 4.1. *Якщо задовольняються умова балансу (4) та умови L1 – L3, то для імпульсного процесу збурення (3) має місце слабка збіжність*

$$\eta^{\varepsilon}(t) \to \eta^0(t), \varepsilon \to 0$$

Граничний процес $\eta^0(t)$ визначається генератором

$$\Gamma\varphi{:}\,(w) = \hat{a}_2\varphi'(w) + \frac{1}{2}\sigma^2\varphi''(w) + \int_R [\varphi(w+v) - \varphi(w)]\hat{\Gamma}_0(dv)$$

де

$$\hat{a} = \int_X \pi(dx)(a_2(x) - a_0(x)),$$

$$\sigma^2 = \int_X \pi(dx)(b(x) - b_0(x)) + 2\int_X \pi(dx)a_1(x)R_0a_1(x),$$

$$a_0(x) = \int_X v\Gamma_0(dv, x),$$

$$b_0(x) = \int_R v^2\Gamma_0(dv, x),$$

$$\hat{\Gamma}_0(v) = \int_R \pi(dx)\Gamma_0(v, x),$$

і це процес Леві з трьома компонентами – детермінованим зсувом, дифузійною складовою та стрибковою частиною Пуассона.

Доведення. Обґрунтуємо деякі додаткові твердження.

Лемма 4.2. *Генератори процесів з незалежними приростами $\eta^\varepsilon(t,x), t \geq 0, x \in X$, можуть бути асимптотично представлені рівнянням*

$$\boldsymbol{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-1}\Gamma_1(x)\varphi(w) + \Gamma_2(x)\varphi(w), \tag{5}$$

на тестових функціях $\varphi(w) \in C^2(\boldsymbol{R})$ в умовах $L1 - L3$, де

$$\Gamma_1(x)\varphi(w) = a_1(x)\varphi'(w),$$

$$\Gamma_2(x)\varphi(w) = \big(a_2(x) - a_0(x)\big)\varphi'(x) + \frac{1}{2}\big(b(x) - b_0(x)\big)\varphi''(x) +$$

$$+ \int_R [\varphi(w+v) - \varphi(v)]\Gamma_0(dv, x]$$

Доведення. Нехай генератор (3) буде перетворено з використанням розкладу функції $\varphi(w)$ у ряд Тейлора:

$$\boldsymbol{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-2}\int_R \big(\varphi(w+v) - \varphi(v)\big)\Gamma^\varepsilon(dv, x) =$$

$$= \varepsilon^{-2}\int_R \left(\left(\varphi(w+v) - \varphi(v) - v\varphi'(v) - \frac{1}{2}v^2\varphi''(w)\right)\right)\Gamma^\varepsilon(dv, x) +$$

$$+\varepsilon^{-2}\int_R \big(v\varphi'(w)\big)\Gamma^\varepsilon(dv, x) + \frac{1}{2}v^2\varepsilon^{-2}\int_R v^2\varphi''(w)\Gamma^\varepsilon(dv, x) =$$

$$= \int_R \left(\varphi(u+v) - \varphi(v) - v\varphi'(w) - \frac{1}{2}v^2\varphi''(w)\right)\Gamma_0(dv, x) +$$

$$+\varepsilon^{-1}a_1(x)\varphi'(w) + a_2(x)\varphi'(w) +$$

$$+\frac{1}{2}\big(b(x) - b_0(x)\big)\varphi''(w) +$$

$$+\int_R \big(w(u+v) - \varphi(v)\big)\Gamma_0(dv, x) + \gamma^\varepsilon(w)\varphi(w),$$

де передостання рівність випливає з умов L1 і L2 (зауважимо, що функція $\varphi(w+v)-\varphi(v)-v\varphi'(v)-\frac{1}{2}v^2\varphi''(w)\in C^2(\mathbf{R})$ оскільки вона обмежена границями $\varphi(w)$ та її похідних і

$$\left[\varphi(w+v)-\varphi(w)-v\varphi'(w)-\frac{1}{2}v^2\varphi''(w)\right]/|v^2|\to 0$$

коли $v\to 0$.

Беручи до уваги, що $\gamma^\varepsilon(w)\varphi(w)=o(\varepsilon^2),\varphi(w)\in C^2(\mathbf{R})$, рівність (5) доведено.

Лемма 4.3. *Генератор двокомпонентного марковського процесу* $(\eta^\varepsilon,x(t/\varepsilon^2)),t\geq 0$ *має вигляд*

$$\hat{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(w,x)=\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(w,x)+\varepsilon^{-1}\Gamma_1(x)\varphi(w,x)+\Gamma_2(x)\varphi(w,x)+\gamma^\varepsilon(x)\varphi(w,x), \quad (6)$$

де оператори $\Gamma_1(x)$ *і* $\Gamma_2(x)$ *визначаються в Лемі 3.1.1 і залишковий член* $\|\gamma^\varepsilon(x)\varphi(w,x)\|\to 0$ *при* $\varepsilon\to 0$, $\varphi(w,x)\in C^2(\boldsymbol{R})$.

Доведення. Використання визначення генератора марковського процесу і форми відповідних генераторів процесів $\eta^\varepsilon(t,x)$ і $x(t/\varepsilon^2)$ робить твердження Леми 2.3 очевидним.

Зрізаний оператор має вигляд [15]

$$\Gamma_0^\varepsilon(x)\varphi(w)=\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(w,x)+\varepsilon^{-1}\Gamma_1(x)\varphi(w,x)+\Gamma_2(x)\varphi(w,x). \quad (7)$$

Лема 4.4. *За умови балансу (4), розв'язок задачі одиночного збурення для зрізаного оператора (7) допускає представлення*

$$\Gamma_0^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(w,x)=\Gamma\varphi(w)+\varepsilon\theta_\eta^\varepsilon(x)\varphi(w), \quad (8)$$

на тестових функціях $\varphi^\varepsilon(w,x)=\varphi(w)+\varepsilon\varphi_1(w,x)+\varepsilon^2\varphi_2(w,x)$

де залишковий член виразу $\theta_\eta^\varepsilon(x)\varphi(w)$ *рівномірно обмежений по* x.

Граничний оператор визначається формулою

$$\Gamma=\Pi\Gamma_1(X)R_0\Gamma_1(x)\Pi+\Pi\Gamma_2(x)\Pi. \quad (9)$$

Доведення. Для виконання рівності (8), коефіцієнти однакових ступенів ε зліва і справа повинні збігатися. Обчислимо

$$\begin{gathered}\Gamma_0^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(w,x)=\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(w)+\\+\varepsilon^{-1}[\mathbf{Q}\varphi_1(w,x)+\Gamma_1(x)\varphi(w)]+\\+[\mathbf{Q}\varphi_2(w,x)+\Gamma_1(x)\varphi_1(w,x)+\Gamma_2(x)\varphi_2(w,x)]+\\+\varepsilon[\Gamma_1(x)\varphi_2(w,x)+\Gamma_2(x)\varphi_1(w,x)]+\\+\varepsilon^2\Gamma_2(x)\varphi_2(w,x).\end{gathered}$$

З першого доданка ми отримаємо

$$\mathbf{Q}\varphi(w)=0\Leftrightarrow\varphi(w)\in N_{\mathbf{Q}},$$

тобто, $\varphi(w)$ не залежить від x.

Умова балансу (4) є умовою розв'язання рівняння

$$\boldsymbol{Q}\varphi_1(w,x)+\Gamma_1(x)\varphi(w)=0.$$

Тоді

$$\varphi_1(w,x)=R_0\Gamma_1(x)\varphi(w). \quad (10)$$

Рівняння

$$\boldsymbol{Q}\varphi_2(w,x)+\Gamma_1(x)\varphi_1(w,x)+\Gamma_2(x)\varphi(w)=\Gamma\varphi(w)$$

згідно з (10), може бути переписане у вигляді

$$\mathbf{Q}\varphi_2(w,x)+\Gamma_1(x)R_0\Gamma_1(x)\varphi(w,x)+\Gamma_2(x)\varphi(w)=\Gamma\varphi(w).$$

Умова розв'язання останнього рівняння дає граничний оператор у вигляді (9). Тоді

$$\varphi_2(w,x)=R_0[\Gamma_1(x)R_0\Gamma_1(x)+\Gamma_2(x)-\Gamma]\varphi(w). \quad (11)$$

Використовуючи (10) і (11), ми можемо звести інші члени розкладу до вигляду

$$\varepsilon[\Gamma_1(x)\varphi_2(w,x)+\Gamma_2(x)\varphi_1(w,x)]+\varepsilon^2\Gamma_2(x)\varphi(w,x)=$$
$$=\varepsilon[[\Gamma_1(x)\mathrm{R}_0[\Gamma_1(x)R_0\Gamma_1(x)+\Gamma_2(x)\Gamma]+\Gamma_2(x)R_0\Gamma_1(x)]+$$
$$+\varepsilon\Gamma_2(x)R_0[\Gamma_1(x)R_0\Gamma_1(x)+\Gamma_2(x)-$$
$$-\Gamma]]\varphi(w)=\varepsilon\theta_\eta^\varepsilon(x)\varphi(w).$$

Обмеженість $\theta_\eta^\varepsilon(x)\varphi(w)$ випливає з вигляду операторів Γ_1, Γ_2 і R_0.
Доведення Леми 2.4 завершено.
Завершення доведення теореми 2.1 здійснюється аналогічно доведенню теореми 6.4 з [2].
Далі побудуємо граничний генератор для всієї еволюційної системи (1).
Теорема 4.5. *При виконанні умов балансу (4) та умов L1 – L3 має місце слабка збіжність*

$$u^\varepsilon(t)\to\hat{u}(t),\ \varepsilon\to 0.$$

Граничний процес $\hat{u}(t)$ визначається генератором

$$\mathbf{L}\varphi(w)=\hat{C}(u)\varphi'(w)+\Gamma\varphi(w), \tag{12}$$

де $\hat{C}(u)=\int_X \pi(dx)C(u,x)$.

Коментар 4.6. Слабка збіжність процесів $u^\varepsilon(t)\to\hat{u}(t),\ \varepsilon\to 0$, випливає зі збіжності відповідних генераторів, коли зберігається компактність граничної множини процесів $u^\varepsilon(t)$.

Коментар 4.7. Граничний процес $\hat{u}(t)$ може бути задано стохастичним диференціальним рівнянням

$$d\hat{u}_d(t)=[\hat{C}(\hat{u}(t))+\hat{a}^2]dt+\sigma dW(t)+\int_{\mathbb{R}} v\tilde{v}(dt,dv)$$

де $\mathbf{E}\tilde{v}(dt,dv)=dt\tilde{\Gamma}_0(dv)$.

Коментар 4.8. Граничний процес $\hat{u}(t)$ має три компоненти. Детермінований зсув визначається розв'язанням диференціального рівняння

$$d\hat{u}_d(t)=[\hat{C}(\hat{u}_d(t))+\hat{a}_2]dt, \tag{13}$$

де додатковий член $\hat{a}_2$ з'являється внаслідок накопичення з нормалізованим часом t/ε^2, $\varepsilon\to 0$ невеликих стрибків імпульсного процесу, які відбуваються з ймовірністю, близькою до одиниці. Друга, дифузійна складова, визначається параметром σ і виникає через накопичення з ростом нормованого часу t/ε^2, $\varepsilon\to 0$ невеликих стрибків порядку ε, які також відбуваються з імовірністю близькою до одиниці.

Третя складова – це рідкісні великі стрибки, які відбуваються з майже нульовою ймовірністю і визначаються з точки зору усередненої міри стрибків $\hat{\Gamma}_0(dv)$ генератором

$$\Gamma_j\varphi(w)=\int_R[\varphi(w+v)-\varphi(w)]\hat{\Gamma}_0(dv).$$

Лема 4.9. *Генератор двокомпонентного марковського процесу* $(u^\varepsilon(t),x(t/\varepsilon^2)),\ t\ge 0$, *має представлення*

$$\mathbf{L}^\varepsilon(x)\varphi(w,x)=\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(w,x)+\Gamma^\varepsilon(x)\varphi(w,x)+\mathbf{C}(x)\varphi(w,x)+\theta_w^\varepsilon\varphi(w,x), \tag{14}$$

де $\Gamma^\varepsilon(x)$ *є генератором сукупності процесів з незалежними приростами,*

$$\mathbf{C}(x)\varphi(w,x)=C(u,x)\varphi'_w(w,x).$$

Залишковий член $\|\theta_w^\varepsilon\varphi(w,x)\|\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.
Доведення леми проводиться за схемою в [7].
Лема 4.10. *Генератор* $\mathbf{L}^\varepsilon(x)$ *має асимптотичне представлення*

$$\mathbf{L}^\varepsilon(x)\varphi(w,x)=\varepsilon^{-2}\mathbf{Q}\varphi(w,x)+\varepsilon^{-1}\Gamma_1(x)\varphi(w,x)+\Gamma_2(x)\varphi(w,x)+\mathbf{C}(x)\varphi(w,x)+\hat{\theta}_w^\varepsilon\varphi(w,x), \tag{15}$$

де

$$\hat{\theta}_w^\varepsilon(x)=\gamma^\varepsilon+\theta_w^\varepsilon(x),$$

$\Gamma_1(x)$ *і* $\Gamma_2(x)$ визначаються *в Лемі 2. 2., а залишковий член*

$$\|\theta_w^\varepsilon\varphi(w,x)\|\to 0$$

при $\varepsilon\to 0$.
У доведенні використовується представлення оператора (15) і результати Леми 2.9.
Зрізаний оператор має форму

$$\mathbf{L}_0^{\varepsilon}(x)\varphi = \varepsilon^2\mathbf{Q}w + \varepsilon^{-1}\Gamma_1(x)\varphi + \Gamma_2(x)\varphi + \mathbf{C}(x)\varphi \tag{16}$$

Лема 4.11. *В умовах балансу (4) розв'язок проблеми сингулярного збурення для зрізаного оператора (6) може бути визначений відношенням*

$$\mathbf{L}_0^{\varepsilon}(x)\varphi^{\varepsilon}(w,x) = \mathbf{L}\varphi(w) + \varepsilon^2\theta_w^{\varepsilon}(x)\varphi(w)\,, \tag{17}$$

на тестових функціях

$$\varphi^{\varepsilon}(w,x) = \varphi(w) + \varepsilon\varphi_1(w,x) + \varepsilon^2\varphi(w,x)$$

де залишковий член $\theta_w^{\varepsilon}(x)$ рівномірно обмежений по відношенню до x Граничний оператор **L** *визначається за формулою*

$$\mathbf{L} = \Pi[\mathbf{C}(x) + \Gamma_1(x)R_0\Gamma(x) + \Gamma_2(x)]\Pi\,. \tag{18}$$

Доведення. Для виконання рівності (17) коефіцієнти ε однакових степенів зліва і справа повинні збігатися. З цією метою проводимо розрахунки

$$\begin{gathered}\mathbf{L}_0^{\varepsilon}(x)\varphi^{\varepsilon}(w,x) = \varepsilon^{-2}\mathbf{Q}(x)\varphi(w) + \\ +\varepsilon^{-1}[\mathbf{Q}\varphi_1(w,x) + \Gamma_1(x)\varphi(w)] + \\ +[\mathbf{Q}\varphi_2(w,x) + \Gamma_1(x)\varphi_1(w,x)] + \\ +\varepsilon[\Gamma_1(x)\varphi_2(w,x) + \Gamma_2(x)\varphi_1(w,x)) + \mathbf{C}(x)\varphi_1(w,x)] + \\ +\varepsilon^2[\Gamma_2(x)\varphi_2(w,x) + \mathbf{C}(x)\varphi_2(w,x)].\end{gathered}$$

Оскільки

$$\mathbf{Q}\varphi(w) \Leftrightarrow \varphi(w) \in N_Q,$$

то очевидно, що $\varphi(w)$ не залежить від x.

Умова розв'язності рівняння має вигляд

$$\mathbf{Q}\varphi_1(w,x) + \Gamma_1(x)\varphi(w) = 0.$$

Тоді

$$\varphi_1(w,x) = R_0\Gamma_1(x)\varphi(w).$$

Маємо останнє рівняння

$$\mathbf{Q}\varphi_2(w,x) + \Gamma_1(x)\varphi(w,x) + \Gamma_2(x)\varphi(w) + \mathbf{C}(x)\varphi(w) = \mathbf{L}\varphi(w).$$

Його можна переписати у такому вигляді

$$\mathbf{Q}\varphi_2(w,x) = [\mathbf{L} - \Gamma_1(x)R_0\Gamma_1(x) - \Gamma_2(x) - \mathbf{C}(x)]\varphi(w).$$

Умова розв'язності для останнього рівняння дає формулу (18) граничного оператора **L**. Завершення доведення теореми 2.5 може бути здійснено за схемою доведення теореми 6.4 [2].

Далі розглянемо випадок, коли збурення системи визначаються імпульсним процесом в іншій некласичній схемі апроксимації [2] – схемі Пуассона. Схема апроксимації Пуасона – це узагальнення класичної схеми усереднення, яка в свою чергу заснована на ідеї закону великих чисел.

Стохастична еволюційна система в ергодичному марковському середовищі визначається стохастичним диференціальним рівнянням

$$du^{\varepsilon}(t) = C(u^{\varepsilon}, x(t/\varepsilon))dt + d\eta^{\varepsilon}(t), u^{\varepsilon}(t) \in \mathbf{R}, \tag{19}$$

де умови, накладені на марковський процес, такі ж, як і в попередньому розділі.

Процес імпульсного збурення $\eta^{\varepsilon}(t),\ t \geq 0$, в схемі апроксимації Пуассона визначається відношенням

$$\eta^{\varepsilon}(t) = \int_0^t \eta^{\varepsilon}(ds, x(s/\varepsilon)) \tag{20}$$

де сукупність процесів з незалежними приростами $\eta^{\varepsilon}(t,x),\ t \geq 0,\ x \in X$, визначається генераторами

$$\Gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-1}\int_R (\varphi(w+v) - \varphi(w))\Gamma^{\varepsilon}(dv,x)\,, x \in X$$

і задовольняє властивості апроксимації Пуассона [14]

P1 – апроксимація середніх

$$\int_R v\Gamma\varepsilon(dv,x) = \varepsilon(a(x) + \theta_a(x)), \theta_a(x) \to 0, \varepsilon \to 0,$$

$$\int_R v^2\Gamma^{\varepsilon}(dv,x) = \varepsilon\big(b(x) + \theta_b(x)\big), \theta_b(x) \to 0, \varepsilon \to 0,$$

P2 – умова, накладена на функцію розподілу

$\int_R g(v)\Gamma^\varepsilon(dv,x) = \varepsilon(\Gamma_g(x) + \theta_g(x)), \theta_g(x) \to 0, \varepsilon \to 0$ для всіх $g(v) \in C^2(\mathbb{R})$ (простір дійсних обмежених функцій, таких, що $g(v)/|v|^2 \to 0,\ |v| \to 0$), де міра $\Gamma_g(x)$ обмежений для всіх $g(v) \in C^2(\mathbb{R})$ (функції з простору $C^2(\mathbb{R})$ вирізають міру):

$$\Gamma_g(x) = \int_R g(v)\Gamma_0(dv,x), g(v) \in C^2(\mathbb{R});$$

Р3 – рівномірна квадратична інтегрованість

$$\sup \lim_{c\to\infty} \int_{|v|>c} v^2\Gamma_0(dv,x) = 0;$$

Р4 – відсутність дифузійної складової

$$b(x) = \int_R v^2\Gamma_0(dv,x)$$

R

Введемо позначення

$$\Gamma_1(x) = a(x)\varphi'(w) + \int_R [\varphi(w+v) - \varphi(v) - v\varphi'(w)]\Gamma_0(dv,x)$$

Наведемо простий приклад випадкових величин, що задовольняють умовам схем апроксимації Леві та Пуассона. Вважаємо α:

$$P\{\alpha = b\} = \varepsilon^2 p,$$
$$P\{\alpha\varepsilon a_1 + \varepsilon^2 b_1\} = 1 - \varepsilon^2 p.$$

Тоді

$$\mathbf{E}\alpha = \varepsilon a_1 + \varepsilon^2(bp + b_1) + o(\varepsilon^2),$$
$$\mathbf{E}\alpha^2 = \varepsilon^2(b^2p + a^2) + o(\varepsilon^2).$$

Ці умови для моментів характеризують апроксимацію Леві

Коли $a_1 = 0$, отримуємо

$$\mathbf{E}\alpha = \varepsilon^2(bp + b_1) + o(\varepsilon^2),$$
$$\mathbf{E}\alpha^2 = \varepsilon^2 b^2 p + o(\varepsilon^2),$$

потім припускаючи, що $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon^2$ отримуємо

$$\mathbf{E}\alpha = \tilde{\varepsilon}(bp + b_1) + o(\tilde{\varepsilon}),$$
$$\mathbf{E}\alpha^2 = \tilde{\varepsilon}b^2p + o(\tilde{\varepsilon}).$$

Ці умови для моментів характеризують апроксимацію Леві.

Дотримуючись схеми дослідження, наведеної у попередньому розділі, ми отримуємо твердження, які розкривають форму генератора границь для імпульсного процесу та самої еволюційної системи.

Теорема 4.12. *Якщо умови* $P1 - P4$ *виконані, для імпульсного процесу збурення (20) має місце слабка збіжність*

$$\eta^\varepsilon(t) \to \eta^0(t), \qquad \varepsilon \to 0$$

Граничний процес $\eta^0(m)$ визначається генератором

$$\varphi(w) = \Pi\Gamma_1(x)\varphi(w) = \tilde{a}\varphi'(w) + \int_R [\varphi(w+v) - v\varphi'(w)]\tilde{\Gamma}_0(dv)$$

де $\tilde{a} = \int_X \pi(dx)a(x), \tilde{\Gamma}_0(v) = \int_X \pi(dx)\Gamma_0(v,x)$, *і це процес з незалежними приростами, який має компоненту Пуассона і детермінований зсув.*

Теорема 4.13. *Якщо задовольняються умови* $P1 - P4$, *має місце слабка збіжність*

$$u^\varepsilon(t) \to \tilde{u}(t), \qquad \varepsilon \to 0$$

Граничний процес $\hat{u}(t)$ *визначається генератором*

$$\mathbf{L}\varphi(w) = \hat{C}(u)\varphi'(w) + \Gamma\varphi(w),$$

де $\hat{C}(u) = \int_X \pi(dx)C(u,x)$.

Коментар 4.14. Граничний процес $\tilde{u}(t)$ має дві компоненти. Детермінований зсув визначається як розв'язок диференціального рівняння

$$d\hat{u}_d(t) = [\hat{C}(\hat{u}_d(t)) + \tilde{a}]dt, \tag{21}$$

де додатковий член $\tilde{a}$ з'являється внаслідок накопичення (з нормалізованим часом $t/\varepsilon,\ t \to 0$) малих стрибків імпульсного процесу, які відбуваються з ймовірністю, близькою одиниці. Другий компонент – це рідкісні великі стрибки, які відбуваються з майже нульовою ймовірністю і визначаються з точки зору усередненої міри стрибків $\tilde{\Gamma}_0(dv)$генератором

$$\Gamma_j\varphi(w) = \int_R [\varphi(w+v) - \varphi(v) - v\varphi'(w)]\tilde{\Gamma}_0(dv)$$

Коментар 4.15. Граничний процес $\tilde{u}(t)$ є чисто детермінованим і визначається рівнянням (21) у разі нульової середньої міри стрибків $\tilde{\Gamma}_0(dv)$. Наприклад, якщо всі моменти порядку три і вище для множини процесів з незалежними приростами $\eta^\varepsilon(t,x),\ t \geq 0,\ x \in X$, дорівнюють нулю, або якщо умова балансу задовольняється

$$\tilde{\Gamma}_0(v) = \Pi\Gamma_0(v,x) = \int_X \pi(dx)\Gamma_0(v,x) = 0.$$

Перейдемо далі до застосувань та дослідимо особливості побудови та аналізу моделі інформаційної боротьби з використанням некласичних схем апроксимації.

Нехай маємо деяку соціальну спільнота з постійною кількістю людей N_0, яка потенційно піддається інформаційному впливу двох типів. Слід розуміти, що кожен з двох видів інформації може мати як позитивні, так і негативні відтінки, найцікавішим є випадок двох антагоністичних думок, поширення яких призводить до поляризації суспільства і питання переможця в інформаційній війні. Значення $N_1(t)$і $N_2(t)$ – це кількість «прихильників» в залежності від часу, які сприймали нову інформацію, ідеї, норми і т.д. типу 1 і 2 відповідно. Основні припущення про класичну модель[13]:

1. Обидві ідеї поширюються серед спільноти через два інформаційні канали:

– перший є «зовнішнім» для спільноти, наприклад, рекламною медійною кампанією. Його інтенсивність характеризується параметрами $\alpha_1 > 0$ і $\alpha_2 > 0$ відповідно, обидва вважаються незалежними від часу;

– другий, «внутрішній» канал – міжособистісна комунікація між членами соціальної спільноти (його інтенсивність – це кількість еквівалентних інформаційних контактів, що характеризуються параметрами $\beta_1 > 0$ і $\beta_2 > 0$ *відповідно,* які також не залежать від часу). В результаті прихильники першої ідеї, які вже «навернуті» (їх кількість дорівнює $N_1(t)$), роблять свій особистий внесок у процес поширення ідеї серед спільноти (їх кількість дорівнює $N_0 - N_1(t) - N_2(t)$), впливаючи на її «незавербованих» членів. Те саме стосується і прихильників другої ідеї.

2. Швидкість зміни кількості прихильників N_1(t) і N_2(t) (тобто кількість прихильників ідеї, «завербованих» за одиницю часу) складається з зовнішньої швидкості вербовки; внутрішньої швидкості вербовки.

Таким чином, частина спільноти, яка ще не була навернута за час t (її гіпотетичний «середній» представник спочатку нейтральний як по відношенню до N_1, такі до N_2), отримує інформацію швидше, ніж більші значення $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$. Більш того, навіть якщо вплив N_1 явно сильніший, ніж вплив N_2, деякі члени спільноти все одно приймають N_2 (тобто немає повної монополії одного типу інформації над іншим). Таким чином, модель описується рівняннями типу Лотки-Вольтера (детальніше про можливі рішення і характеристики динамічної системи див. [13]):

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = (\alpha_1 + \beta_1 N_1(t))(N_0 - N_1(t) - N_2(t)),$$

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = (\alpha_2 + \beta_2 N_2(t))(N_0 - N_1(t) - N_2(t)), \qquad t > 0.$$

Основним недоліком класичної моделі є, по-перше, сталість характеристик (інтенсивності) інформаційного впливу, а по-друге, відсутність здатності враховувати раптові непередбачувані події, що впливають на свідомість споживачів інформації. Очевидно, що в сучасному світі, де інформація поширюється миттєво і в той же час охоплює широку аудиторію, такі рідкісні, але дуже впливові фактори повинні бути враховані. Ми будуємо і досліджуємо модель інформаційної боротьби у вигляді

$$dN^\varepsilon(t) = C\left(N^\varepsilon, x\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right)\right)dt + d\eta^\varepsilon(t),\ N^\varepsilon(t) \in \mathbb{R}. \qquad (22)$$

де

$$C\left(N^{\varepsilon},x\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right)\right) =$$
$$= \begin{pmatrix} -\alpha_1(x)+\beta_1(x)N_0-\beta_1(x)N_1^{\varepsilon}(t) & -\alpha_1(x)-\beta_1(x)N_1^{\varepsilon}(t) \\ -\alpha_2(x)-\beta_2(x)N_2^{\varepsilon}(t) & -\alpha_2(x)+\beta_2(x)N_0-\beta_2(x)N_2^{\varepsilon}(t) \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} N_1^{\varepsilon}(t) \\ N_2^{\varepsilon}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 N_0 \\ \alpha_2 N_0 \end{pmatrix}$$

У запропонованій моделі враховуються як випадковий вплив навколишнього середовища на інтенсивність поширення інформації, так і рідкісні випадкові стрибки, які в короткостроковій перспективі істотно змінюють кількість «послідовників» відповідних ідей.

Основний результат полягає в тому, що вплив великих стрибків зберігається в граничному процесі. Ці великі стрибки, зокрема, імітують резонансні події, які миттєво і істотно впливають на думки людей. Вони зустрічаються дуже рідко, але значно змінюють думку. Це не враховується в жодній іншій відомій моделі. У нашій постановці проблеми усереднена гранична модель інформаційної боротьби має форму

$$\mathbf{L}\varphi(w) = \hat{C}(u)\varphi'(w) + \Gamma\varphi(w),$$

де $\hat{C}(u) = \int_X \pi(dx)C(u,x)$.

У випадку з відомим перемикаючим процесом, який володіє «добрими» властивостями, наприклад, процесом Орнштейна-Уленбека, наведені вище формули можуть бути явно розраховані з урахуванням типу потенціального оператора.

Висновки. Запропоновано нову форму моделі інформаційної боротьби з додатковим впливом випадковості. Така модель може бути більш природною, ніж існуючі, оскільки у наш час екстрені новини спричиняють швидкий і значний вплив на аудиторію через телебачення та Інтернет. Поведінку узагальненої моделі не можна явно аналізувати протягом будь-якого фіксованого моменту часу, як це було зроблено в класичному випадку. Але, як це робиться зазвичай для стохастичних моделей, можна отримати функціональні граничні теореми, які представляють поведінку на великих часових інтервалах. Таким чином, здійснено усереднення граничних характеристик процесу і можна використовувати їх для побудови явних розв'язків. Іншими словами, всі функції, які залежать від марковського процесу, повинні бути усереднені за стаціонарною мірою перемикань марковського процесу.

Література:

1. Lotka, A. J. (1907). Relation between birth rates and death rates. *Science, 26*, 21–22.
2. Korolyuk, V. S., Limnios, N. (2005). *Stochastic Systems in Merging Phase Space*. World Scientific.
3. Tufto, J. (2001). Effects of releasing maladapted individuals: a demographic evolutionary model, *The American Naturalist, 158.4*, 331–340.
4. Volterra, V. (1901). Sui tentativi di applicazione della matematiche alle scienze biologiche e sociali. *Giornale degli Economisti, 23*, 436–458.
5. Stone, L., Olinky, R. (2003). Phenomena in ecological systems. *Experimental Chaos: 6th Experimental Chaos Conference*, 476–487.
6. Verhulst, P. P. (1838). Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Correspondence mathematique et physique publiee par A. Quetelet,* 10, 113–121.
7. Korolyuk, V. S., Limnios, N., Samoilenko, I. V. (2016). Levy and Poisson approximations of switched stochastic systems by a semimartingale approach. *Comptes Rendus Mathematique, 354*, 723–728.
8. Takahashi, K. I., Salam, K. Md. M. (2006). Mathematical model of conflict with non-annihilating multi-opponent. *J. Interdisciplinary Math., 9.3*, 459–473.
9. Nikitin A. V. (2015). Asymptotic Properties of a Stochastic Diffusion Transfer Process with an Equilibrium Point of a Quality Criterion. *Cybernetics and Systems Analysis*, *51.4*, 650– 656.
10. Samoilenko, I. V., Nikitin, A. V. (2018). Differential equations with small stochastic terms under the Levy approximation conditions, *Ukrainian Mathematical Journal*, *69.9*, 1445–1454.
11. Nikitin, A.V., Khimka, U. T. (2017). Asymptotics of Normalized Control with Markov Switchings. *Ukrainian Mathematical Journal*, *68.8*, 1252–1262.
12. Nikitin, A. V. (2018). Asymptotic dissipativity of stochastic processes with impulsive perturbation in the Levy approximation scheme. *Journal of Automation and Information Sciences*, *68.8*, 1252–1262.
13. Mikhailov, A. P., Marevtseva, N.A. (2012). Models of information warfare. *Math. Models Com-put. Simul.*, *4.3*, 251–259.
14. Samoilenko, I. V., Chabanyuk, Y. M., Nikitin, A. V. (2018). Asymptotic Dissipativity of Random Processes with Impulse Perturbation in the Poisson Approximation Scheme. *Cybernetics and Systems Analysis*, *54.2*, 205–211.

15. Chabanyuk, Y. M., Nikitin, A. V., Khimka, U. T. (2019). Asymptotic properties of the impulse perturbation process under Levy approximation conditions with the point of equilibrium of the quality criterion. *Mathematychni Studii*, *52.1*, 96–104.

16. Samoilenko, I. V., Nikitin, A.V. (2019). Double Merging of the Phase Space for Stochastic Differential Equations with Small Additions in Poisson Approximation Conditions. *Cybernetics and Systems Analysis*, *55.2*, 265–273.

17. Papanicolaou, G., Stroock, D., Varadhan, S. R. S. (1977). Martingale approach to some limit theorems. *Duke turbulence conference, Durham, NC, April 23-25, 1976, Duke University Mathematics Series III*, New York: Duke University.

18. Anisimov, V. V. (2008). *Switching processes in queuing models*. London: Wiley-ISTE.