Отримано: 23 квітня 2023 р.

Прорецензовано: 20 квітня 2023 р.

Прийнято до друку: 01 червня 2023 р.

e-mail: zinkevych.tetyana@kneu.edu.ua

ORCID-ідентифікатор: https://orcid.org/0000-0002-4200-6609

e-mail: v.lisovskaya@i.ua

ORCID-ідентифікатор: https://orcid.org/0000-0001-8675-3975

e-mail: nadshhek@ukr.net

ORCID-ідентифікатор: https://orcid.org/0000-0002-1784-6139

DOI: 10.25264/2311-5149-2023-29(57)-74-83

Кудик Т. О., Лісовська В. П., Щекань Н. П. Павутиноподібна модель ринку з навчанням. *Наукові записки Національного університету «Острозька академія». Серія «Економіка» : науковий журнал.* Острог : Вид-во НаУОА, червень 2023. № 29(57). С. 74–83.

УДК: 330.43

JEL- класифікація: C2

Кудик Тетяна Олексіївна,
кандидат економічних наук, доцент кафедри корпоративних фінансів і контролінгу
Київського національного економічного університету імені Вадима Гетьмана
Лісовська Валентина Петрівна,
кандидат фізико-математичних наук, професор кафедри вищої математики
Київського національного економічного університету імені Вадима Гетьмана
Щекань Надія Петрівна,
старший викладач кафедри вищої математики
Київського національного економічного університету імені Вадима Гетьмана

ПАВУТИНОПОДІБНА МОДЕЛЬ РИНКУ З НАВЧАННЯМ

У статті розглянуто як простішу динамічну модель ринку деякого товару (павутиноподібну модель), так і модифікацію простішої павутиноподібної моделі, у якій ціна на ринку встановлюється продавцями. Це динамічні моделі. Зокрема, розглянуто саме дискретні моделі, що описуються різницевими рівняннями першого порядку та системами різницевих рівнянь. Також розглянуто модифікацію простішої павутиноподібної моделі, у якій ціна на ринку встановлюється продавцями. Продавці при цьому орієнтуються (тобто мають стратегію) на деяке середньозважене значення між попитом та пропозицією в попередньому періоді. Представлено види моделей та проаналізовано властивості загальних розв'язків різницевих рівнянь та систем різницевих рівнянь, які описують павутиноподібну модель та її модифікацію.
Ключові слова: *різницеві рівняння, динамічні моделі, павутиноподібна модель, ціна, стійкість, попит, пропозиція.*

Tetyana Kudyk,
Ph.D., assistant professor of Corporate finance and controlling,
Kyiv National Economic University named after Vadym Hetman
Valentyna Lisovska,
Ph.D., professor of Higher mathematics,
Kyiv National Economic University named after Vadym Hetman
Nadiya Shchekan,
Senior Lecturer of Higher mathematics,
Kyiv National Economic University named after Vadym Hetman

A WEB-LIKE MODEL OF THE LEARNING MARKET

The article discusses both a simpler dynamic model of a product market (referred to as the «web-like model») and a modified version of this model where sellers set the market price. These dynamic models are described using discrete first-order difference equations and systems of difference equations.

The study focuses on the importance of understanding dynamic market models for certain products, particularly the web and web-like market models with training, which are examined in the article. Based on certain assumptions (described further in the article), a Valsar interpretation of these models is provided: the market is regulated by an auctioneer who initially announces the product price, and then buyers and sellers execute agreements and communicate the results to the auctioneer in terms of supply and demand volumes. If the agreements are found to be imbalanced, the auctioneer adjusts the price in an attempt to restore market equilibrium. Final agreements are made once equilibrium is reached.

The article considers cases where the initial point coincides or does not coincide with equilibrium, and analyzes the price and production volume trends in these scenarios. A formula is derived that determines the trajectory of price changes in the «spider model», indicating that the market price will fluctuate around the equilibrium price.

Additionally, a modification of the simpler spider-like model is discussed, where sellers determine the market price by focusing on a weighted average value between demand and supply from the previous period. Similar to the web model, the equilibrium price is found. The article investigates the case when the initial point does not coincide with equilibrium and examines the trends of prices and production volumes in this scenario.

Different types of models are presented, and the properties of general solutions of difference equations and systems of difference equations that describe the web-like model and its modification are analyzed.

***Keywords**: differential equations, dynamic models, web model, price, stability, demand, supply.*

Постановка проблеми. В економічних дослідженнях часто трапляються задачі, у яких змінні набувають дискретних числових значень, тобто змінна t набуває значень із множини невід'ємних цілих чисел $Z_+ = \{0,1,2,...\}$ та інтерпретується як номер періоду часу. Наприклад, на кінець місяця, кварталу, року тощо оптимізуються результати виробництва; нарахування відсотків по банківському внеску на кінець місяця, півроку, на кінець року. Крім того, оскільки обчислювальні машини оперують тільки з числами, при використанні комп'ютерної техніки всі неперервні процеси зводяться до дискретних. В такому випадку від диференціальних рівнянь, які описують ті чи інші економічні процеси, переходять до різницевих рівнянь. Обмежимося надалі розглядом простішої динамічної моделі ринку (павутинної моделі) деякого товару [3, с. 159] та її модифікації (павутиноподібної моделі з навчанням).

Завдяки зробленим певним припущенням вдається дати вальсаровську інтерпретацію моделі: ринок регулює деякий аукціоніст, який спочатку оголошує ціну товару (початкову ціну), після чого покупці та продавці здійснюють умови згоди та повідомляють її результати – обсяги попиту-пропозиції аукціоністу; якщо умови згоди виявилися не збалансованими, то аукціоніст оголошує нову ціну, намагаючись збалансувати ринок. Остаточні домовленості (угоди) здійснюються після досягнення рівноваги.

Розглядається випадок, коли початкова точка не збігається з рівноважною та досліджується тенденція цін і обсягів виробництва в цьому випадку.

Спочатку виводиться формула, яка визначає траєкторію зміни ціни в даній моделі та проводиться аналіз знайденого розв'язку.

Надалі розглядається модифікація простішої павутиноподібної моделі, у якій ціна на ринку встановлюється продавцями. Продавці при цьому орієнтуються (тобто мають стратегію) на деяке середньозважене значення між попитом та пропозицією в попередньому періоді.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. В економічних дослідженнях, як на мікро-, так і на макрорівні, часто трапляються задачі, у яких необхідним елементом є математичні методи і моделі. Зокрема, є моделі, які описуються диференціальними рівняннями чи системами диференціальних рівнянь. Часто трапляються моделі, в яких змінні набувають дискретних числових значень. Оскільки обчислювальні машини оперують тільки з числами, у разі використання комп'ютерної техніки всі неперервні процеси зводяться до дискретних. У такому випадку від диференціальних рівнянь, які описують різні економічні процеси, переходять до різницевих рівнянь.

В економічній літературі відображення проблематики моделювання різних економічних процесів було ще у XVIII ст. (Ф. Кене, Д. Рікардо, А. Сміт). У XIX ст. значний вклад в моделювання ринкової економіки внесла математична школа (Л. Вальрас, О. Курно, В. Парето та ін.). У XX ст. математичні методи моделювання застосовувались дуже широко. Відомі праці Дж. Кейнса та його послідовників, які відіграли особливу роль у становленні макроекономічної теорії. Вивчення якісних методів аналізу динамічних моделей є важливим для фахівців, які спеціалізуються в сфері економічної теорії, математичних методів в економіці, макроекономіці. Сучасний економіст повинен вміти моделювати і досліджувати динаміку процесів в економічних, соціальних та інших системах.

У моделюванні динамічних процесів (в економіці, банківській справі та ін.) успішно використовуються різницеві рівняння і системи рівнянь. Саме тоді, коли зміна процесу відбувається стрибкоподібно, або дискретно, зручно і доцільно застосовувати різницеві рівняння та системи рівнянь.

В результаті побудови математичних моделей реальних економічних та фізичних процесів виникла теорія динамічних систем з дискретним часом, саме на стику теорії різницевих рівнянь і нині вона переживає період бурхливого розвитку та широкого застосування у найрізноманітніших царинах життєдіяльності людини.

Важливим було і є дослідження рівноваги ринку. Цьому питанню завжди приділялась увага науковців, зокрема Л. Вальраса, Е. Енгела, А. Маршалла(павутиноподібна модель ринку).

Зокрема, завжди приділялась увага науковців, як-от: Л. Вальрас, Е. Енгел, А. Маршалл (павутиноподібна модель ринку) – дослідженням рівноваги ринку. К.Ерроу побудував свою концепцію на теорії корисності.

Важливе значення має дослідження простішої динамічної моделі ринку деякого товару (павутинної та павутиноподібної моделі ринку з навчанням).

Мета і завдання дослідження. Усі динамічні макромоделі – як аналітичні, так і ті, які допускають лише кількісні дослідження, – умовно поділяють на дві групи: моделі економічного зростання (описуються лінійними та нелінійними різницевими рівняннями першого порядку) та моделі економічного циклу, або їх ще називають моделями економічних коливань (це дискретні моделі другого порядку). Мета нашої роботи полягає у дослідженні моделей, які описуються різницевими рівняннями першого порядку та системами різницевих рівнянь першого порядку. Такими є павутинна та павутиноподібна модель з навчанням, які розглянемо в статті. Вивчимо питання стійкості розв'язку у моделі взаємодії попиту та пропозиції як функцій ціни в дискретному часі, тобто коли час приймає тільки цілочисельні значення $t = 0,1,2,3, ..., n$, а ціна $p(t)$ визначається відповідно як $p(0), p(1), p(2), p(3), ..., p(n)$.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо приклади моделей, що описуються різницевими рівняннями першого порядку.

Павутинна модель ринку. Розглянемо простішу динамічну модель ринку деякого товару [3, с. 159]. Допускаємо, що деяка фірма (виробник) визначає пропозицію товару в поточному періоді t на підставі цін, які було встановлено в попередньому періоді $(t – 1)$. В цій моделі робиться припущення, що обсяг попиту Q_t в будь-який поточний момент часу залежить від рівня ціни P_t товару в конкретному періоді, тоді

$$Q_t = Q(P_{t}), \tag{1}$$

а пропозиція реагує на зміну ціни з деяким запізненням, тобто обсяг пропозиції S_t залежить від ціни $P_{t–1}$ товару в попередньому періоді:

$$S_t = \mathrm{S}(P_{t–1}). \tag{2}$$

Отже, до функції пропозиції входить часовий лаг тривалістю в одиницю часу (наприклад, один рік). Можливі різні інтерпретації цього запізнення. Наприклад, можна вважати, що виробникам необхідний запас часу, щоб перейти на новий рівень випуску продукції після реагування на зміни рівня ринкової ціни.

Інший варіант інтерпретації – виробники визначають в період $(t –1)$ об'єм пропозиції наступного періоду, припускаючи, що ціна періоду $(t –1)$ збережеться і в період t. Насправді, рішення щодо обсягу виробництва приймається з урахуванням поточних цін, але виробничий цикл має певну тривалість, і відповідне цьому рішення пропозиції на ринку з'являється після завершення цього циклу.

Наступним припущенням моделі є те, що зміна ціни у часі відбувається таким чином, щоб ринок був збалансованим у кожному періоді, тобто поточний попит дорівнював поточній пропозиції: $Q_t = S_t$, тобто

$$Q(P_t) = S(P_{t–1}) \tag{3}$$

з відомим початковим значенням ціни P_0 .

Позначимо $\Delta Q(P_{t–1}) = Q(P_t) – Q(P_{t–1})$, тоді формула (3) набуде вигляду $\Delta Q(P_{t–1}) = S(P_{t–1}) – Q(P_{t–1})$, або

$$\Delta Q(P_t) = \mathrm{S}(P_t) – \mathrm{Q}(P_t), \tag{4}$$

де $\Delta Q(P_t)$ – кінцева різниця для величини попиту.

Припущення (3) означає, що ціна цього товару здатна врівноважити попит з пропозицією у будь-який період. З останнього рівняння знаходиться значення ціни P_t у поточний період часу за відомим значенням $P_{t–1}$ у попередній період часу. Якщо відомо початковий рівень ціни P_0, то із рекурентного рівняння (3) визначається траєкторія ціни, а за нею – траєкторії попиту та пропозиції, які збігаються.

Нехай початкову ціну P_1 називає виробник (у найпростішому випадку він і є продавцем). Ціна P_1 вища за рівноважну [1, с. 188] (оскільки будь-який виробник намагається одержати максимальний прибуток зі свого виробництва). Покупець оцінює попит Q_1 за цієї ціни й визначає свою ціну P_2, за якої попит Q_1 дорівнює пропозиції. Ціна P_2 нижча, ніж рівноважна, оскільки будь-який покупець намагається придбати товар якнайдешевше. В свою чергу, виробник оцінює попит Q_2, що відповідає ціні P_2, і визначає свою ціну P_3, за якої попит дорівнює пропозиції; ця ціна вища від рівноважної. Процес торгу, що продовжується за певних умов, призводить до стійкого наближення до рівноважної ціни, тобто до «скручування» спіралі (рис. 1).

Розглянемо числову послідовність, яка складається з цін у процесі торгу

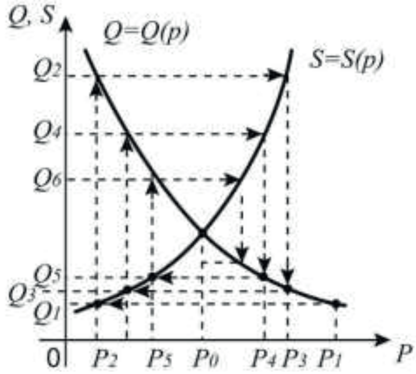

Рис. 1

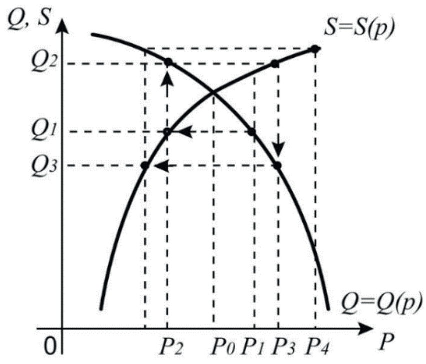

Рис. 2

$P_1, P_2, P_3, .., P_n$,...., то границею цієї послідовності є рівноважна ціна P_0, тобто $P_0 = \lim P_n$. Але « спіраль» встановлення рівноважної ціни не завжди «скручується» до точки P_0. Якщо економіка «хвора» [1, с. 188], то криві попиту й пропозиції можуть мати інший вигляд, наприклад, як на рис. 2. На цьому рисунку ілюструється випадок, коли пропозиція явно недостатня, а купівельна спроможність населення дуже низька. У цьому разі рівноважна ціна P_0 не стійка, покупцеві не вдається втримати ціну, і тоді в результаті такого торгу виграє виробник. Така ситуація можлива, якщо виробник є монополістом. В цьому випадку рівноважну ціну можна втримати лише неринковими засобами (наприклад, державним втручанням).

Розглянемо приклад павутинної моделі, і для спрощення аналізу такої моделі візьмемо функції попиту й пропозиції лінійними:

$$Q(P) = c - d \cdot P,\ S(P) = a + b \cdot P. \quad (5)$$

Тут a, b, c, d – параметри. Зауважимо, що з економічної точки зору доцільно вважати, що $b > 0$, бо функція пропозиції $S(P)$ зростаюча; $d > 0$, оскільки функція попиту спадна; $c > a > 0$, тобто $Q(0) > S(0)$ – бо вважаємо, що за нульової ціни попит перевищує пропозицію. Згідно з (1), (5) та умовами рівноваги (3) маємо:

$$\begin{cases} Q(P_t) = c - d \cdot P_t, \\ S(P_{t-1}) = a + b \cdot P_{t-1}, \\ c - d \cdot P_t = a + b \cdot P_{t-1}. \end{cases} \quad (6)$$

Система рівнянь (6) представляє собою модель ринку і називається ***павутинною моделлю ринку***. Знайдемо розв'язок останнього рівняння системи, для чого виразимо його відносно P_t:

$$P_t = \frac{c-a}{d} - \frac{b}{d} P_{t-1}. \quad (7)$$

Спочатку визначимо рівноважну ціну, тобто точку рівноваги з рівняння $P^* = \frac{c-a}{d} - \frac{b}{d} P^*$:
$\frac{c-a}{d} = (1 + \frac{b}{d}) \cdot P^*$, звідки $P^* = \frac{c-a}{b+d}$.

Дістали не залежний від часу розв'язок $P_t = P^*$ для будь-якого значення t. Оскільки $c > a > 0$, $b > 0$, $d > 0$, то $P^* > 0$.

Для цієї ціни рівноважний обсяг виробництва Q^* визначається з рівняння $Q^* = S^* = c - d \cdot P^* = a + b \cdot P^*$ і дорівнює

$$Q^* = a + b \cdot \frac{c-a}{b+d} = \frac{a(b+d) + b(c-a)}{b+d} = \frac{ab + ad + bc - ab}{b+d} = \frac{bc + ad}{b+d}.$$ Отже, $Q^* = \frac{bc+ad}{b+d}$.

Зауважимо, що динамічний розв'язок моделі збігається з ціною ринкової рівноваги в статичній моделі $Q(P) = S(P)$. В цьому неважко переконатись. Прирівняємо функції попиту та пропозиції (5), дістанемо $P = \frac{c-a}{b+d}$.

Розглянемо випадок, коли початкова точка не збігається з рівноважною та дослідимо тенденцію цін і обсягів виробництва в цьому випадку. Задаючи певну початкову ціну та певний початковий обсяг товару і згідно з процедурою розрахунків за моделлю наноситимемо послідовно точки в системі координат (Q; P) та (S; P), потім з'єднаємо їх горизонтальними та вертикальними прямими (рис. 3).

Спочатку виведемо формулу, яка визначає траєкторію зміни ціни в даній моделі. Нехай P_0 – початкова ціна. Знайдемо P_1. Розглянемо числову послідовність, яка складається з цін у процесі торгу P_1, P_2, P_3, .., P_t, послідовно підставляючи P_i, i = 1,2,3, ..., t, ... у рівняння (7), дістанемо:

$$P_1 = \frac{c-a}{d} - \frac{b}{d}P_0,$$

$$P_2 = \frac{c-a}{d} - \frac{b}{d}P_1 = \frac{c-a}{d} - \frac{b}{d}\left(\frac{c-a}{d} - \frac{b}{d}P_0\right) = \frac{c-a}{d} - \frac{b}{d}\frac{c-a}{d} + \left(\frac{b}{d}\right)^2 P_0 =$$

$$= \frac{c-a}{d}\left(1 - \frac{b}{d}\right) + \left(\frac{b}{d}\right)^2 P_0, P_3 = \frac{c-a}{d} - \frac{b}{d}P_2 = \frac{c-a}{d} - \frac{b}{d}\left(\frac{c-a}{d}\left(1 - \frac{b}{d}\right) + \left(\frac{b}{d}\right)^2 P_0\right) =$$

$$= \frac{c-a}{d}\left(1 - \frac{b}{d} + \left(\frac{b}{d}\right)^2\right) - \left(\frac{b}{d}\right)^3 P_0, \ldots,$$

$$P_t = \frac{c-a}{d} - \frac{b}{d}P_{t-1} = \frac{c-a}{d} -$$

$$-\frac{b}{d}\left(\frac{c-a}{d}\left(1 - \frac{b}{d} + \left(\frac{b}{d}\right)^2 - \left(\frac{b}{d}\right)^3 + \ldots + (-1)^{t-1}\left(\frac{b}{d}\right)^{t-2}\right) + (-1)^{t-1}\left(\frac{b}{d}\right)^{t-1} P_0\right) =$$

$$= \frac{c-a}{d}\left(1 - \frac{b}{d} + \left(\frac{b}{d}\right)^2 - \left(\frac{b}{d}\right)^3 + \ldots + (-1)^t\left(\frac{b}{d}\right)^{t-1}\right) + (-1)^t\left(\frac{b}{d}\right)^t P_0.$$

Отже, дістали рекурентне співвідношення

$$P_t = \frac{c-a}{d}\left(1 - \frac{b}{d} + \left(\frac{b}{d}\right)^2 - \left(\frac{b}{d}\right)^3 + \ldots + (-1)^t\left(\frac{b}{d}\right)^{t-1}\right) + (-1)^t\left(\frac{b}{d}\right)^t P_0. \quad (8)$$

Вираз $\left(1 - \frac{b}{d} + \left(\frac{b}{d}\right)^2 - \left(\frac{b}{d}\right)^3 + \ldots + (-1)^t\left(\frac{b}{d}\right)^{t-1}\right)$ є сумою t членів геометричної прогресії.

За формулою суми n перших членів геометричної прогресії дістаємо формулу для ціни P_t у будь-який момент часу t:

$$P_t = \frac{c-a}{d}\frac{1-(-1)^t\left(\frac{b}{d}\right)^t}{1+\frac{b}{d}} + (-1)^t\left(\frac{b}{d}\right)^t P_0, \text{ або}$$

$$P_t = \frac{c-a}{b+d}\left(1 - \left(-\frac{b}{d}\right)^t\right) + (-1)^t\left(\frac{b}{d}\right)^t P_0. \quad (9)$$

Формула (9) визначає траєкторію зміни ціни в «павутинній моделі». З неї безпосередньо випливає, що ринкова ціна P_t коливатиметься навколо рівноважної ціни P^*, оскільки множник $\left(-\frac{b}{d}\right)^t$ може приймати як додатні, так і від'ємні значення. Однак, якісний аналіз цих коливань та стійкість рівноваги залежать від відношення параметрів b, d.

Можливі три випадки, які проілюстровано на рис. 3.

1) Якщо $\frac{b}{d} < 1$, тобто $b < d$, то $\left(\frac{b}{d}\right)^t \to 0$ для $t \to \infty$, а $P_t \to \frac{c-a}{b+d} = P^*$. Стан рівноваги асимптотично стійкий.

2) Якщо $\frac{b}{d} > 1$, тобто $b > d$, то $\left(\frac{b}{d}\right)^t \to \infty$ для $t \to \infty$. В цьому випадку траєкторія ціни, коливаючись, все далі відхилятиметься від рівноважної ціни P^*.

3) Для $\frac{b}{d} = 1$, тобто $b = d$, значення P_t коливатимуться навколо рівноважного значення, оскільки ціна прийматиме лише два значення, відхиляючись від рівноважної ціни то в більший, то в менший бік на одну й ту ж величину. В цьому випадку говорять, що ціна здійснює регулярні або циклічні коливання навколо рівноважного рівня.

На рис. 3 ліворуч зобразимо прямі попиту та пропозиції для різних нахилів, а праворуч – схематичний графік залежності ціни від часу (тобто траєкторії змінної P). З рівнянь (5), що задають залежність попиту Q і пропозиції S від ціни P, виразимо P та знайдемо рівняння прямих попиту та пропозиції відповідно:

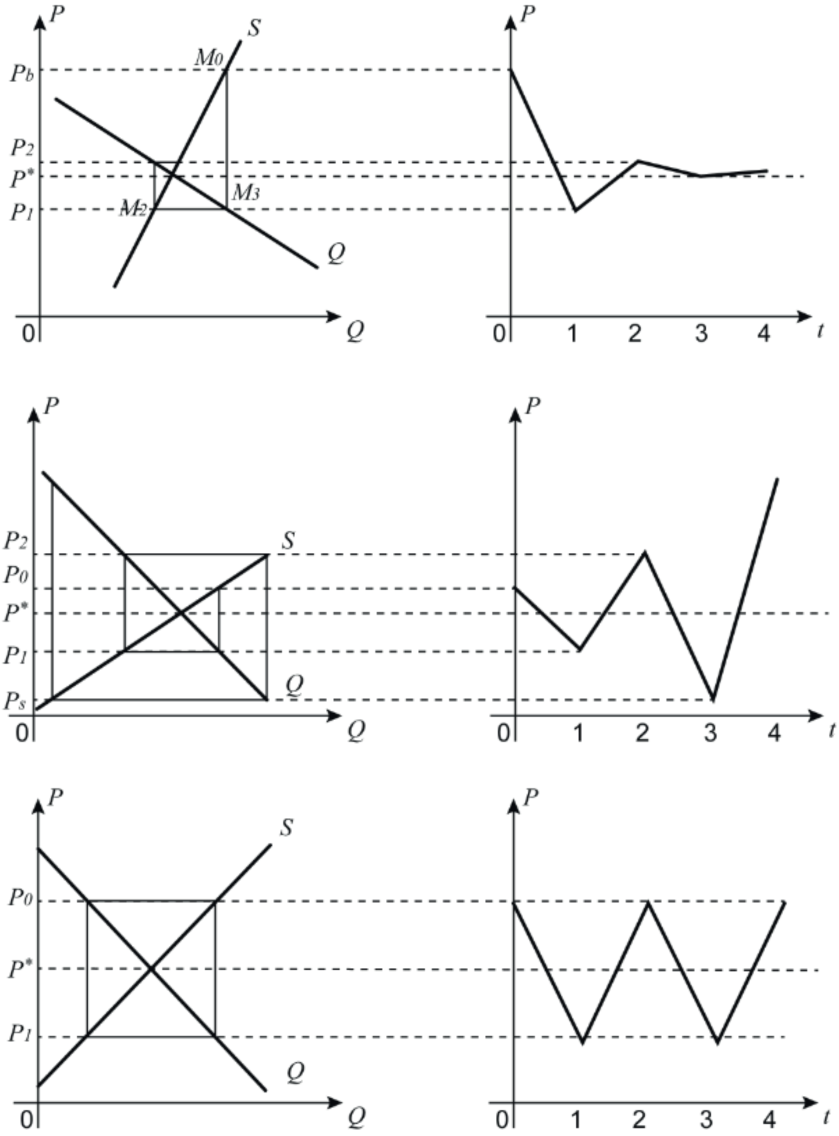

Рис. 3

$P = \frac{c}{d} - \frac{1}{d}Q$ з нахилом $-\frac{1}{d} < 0$; та $P = -\frac{a}{b} + \frac{1}{b}S$ з нахилом $\frac{1}{b} > 0$. Побудуємо ці лінії та проаналізуємо взаємодію попиту та пропозиції в залежності від зміни ціни (рис. 3). У випадку 1) $\left|-\frac{1}{d}\right| < \frac{1}{b}$ – абсолютне значення нахилу прямої попиту менше нахилу прямої пропозиції (тобто $\frac{1}{d} < \frac{1}{b}$, звідки $d > b$) і тому пряма пропозиції на графіку зображена більш круто по відношенню до осі OQ. На графіку ліворуч прослідкуємо, як відбувається процес зміни ціни.

Початковій ціні P_0 згідно з системою (6) відповідає пропозиція $S_1 = d + bP_0$ (на рис. 3 це точка M_0 на прямій S). В цьому випадку виникає надлишок пропозиції і тоді рівновага на ринку встановлюється за рахунок зменшення ціни до рівня P_1 (на рис. 3 це точка M_1 на прямій Q). Новій ціні P_1 відповідає об’єм пропозиції $S_2 = d + bP_1$ (на рис. 3 – точка M_2 на прямій пропозиції S). А зараз виникає дефіцит пропозиції; в цьому випадку рівність пропозиції та попиту призводить до збільшення ціни до рівня P_2 (це точка M_3 на прямій попиту Q). Повторюємо далі процес взаємодії попиту та пропозиції завдяки зміні ринкової ціни. З’єднуємо послідовно точки M_0, M_1, M_2, M_3,... відрізками прямих, дістанемо так звану «спіраль», що закручується. Вона нагадує вигляд павутини (звідси походить і назва моделі). Відповідно, праворуч на графіку траєкторії (рис. 3, випадок 1) амплітуда коливань ціни біля P^* з часом затухає.

У випадках 2) та 3), коли абсолютний нахил прямої попиту більше або дорівнює нахилу прямої пропозиції, картинки будуються за аналогічною схемою, як і у випадку 1), але мають інший вигляд (рис. 3 2) та 3)) відповідно. Отже, навіть при нормальному нахилі ліній попиту та пропозиції запізнення в реакції пропозиції на зміну ціни може призвести до нестабільності ринку. Тому недоліки «павутиноподібної» моделі є очевидними [3, с. 169]. По-перше, розбіжні та циклічні коливання (випадки 2) та 3)) на практиці не спостерігаються, оскільки виробники рано чи пізно помічають (навчившись на своїх помилках), що їхні очікування, які основані на збереженні ціни минулого періоду, не виправдовують себе, тому вони змінять процедуру визначення очікуваної ціни. Наприклад, виробник може визначати пропозицію товару, виходячи із середньозважених цін декількох попередніх періодів. По-друге, в моделі не враховано вплив сукупної поведінки всіх виробників. Наприклад, нехай в деякому році пропозиція зерна (чи картоплі) була порівняно невеликою, а ціна – високою. Тоді можна припустити, що окремий фермер в такій ситуації буде збільшувати посів (посадку) зерна (картоплі), очікуючи, що його висока ціна збережеться. Однак, якщо всі фермери зроблять так само, то на наступний рік під впливом зростання пропозиції ціна на зерно (картоплю) впаде (знизиться).

І нарешті, зовсім не обов'язково мати припущення гнучкості ціни цього товару та збіг із пропозицією в кожному періоді. Зміна ціни може відбуватися і в нерівноважній ситуації під впливом надлишкового попиту (про це у наступній моделі).

«Павутиноподібна модель ринку з навчанням».

Розглянемо модифікацію простішої павутиноподібної моделі, у якій ціна на ринку встановлюється продавцями. Продавці при цьому орієнтуються на деяке середньозважене значення між попитом та пропозицією в попередньому періоді. Ця стратегія описується умовою

$$S_{t+1} = \alpha S_t + (1-\alpha)Q_t, \tag{10}$$

де S_t обсяг пропозиції у момент часу t, а Q_t – обсяг попиту у момент часу t, α – параметр, що характеризує стратегію продавців, причому $0 < \alpha < 1$. Тим самим продавці намагаються прилаштуватися до коливань ціни, а коливання «навчають» продавця робити більш точний прогноз пропозиції.

Нехай функції пропозиції та попиту лінійні, тобто динамічні функції S_t, Q_t – лінійні: $S_t = c + dP_t$, $Q_t = a - bP_t$. В цьому випадку рівняння (10) набуде вигляду

$c + dP_{t+1} = \alpha(c + dP_t) + (1-\alpha)(a - bP_t)$. Розв'яжемо останнє рівняння відносно P_{t+1}:

$dP_{t+1} = \alpha c + \alpha dP_t + a - \alpha a - bP_t + \alpha bP_t - c$, або

$P_{t+1} = \frac{1}{d}\left((\alpha c - c) + (\alpha d - b + \alpha b)P_t + (a - \alpha a)\right)$, звідки

$P_{t+1} = \frac{1}{d}\left(c(\alpha-1) + (\alpha d - b(1-\alpha))P_t + a(1-\alpha)\right)$, і, остаточно,

$$P_{t+1} = \frac{1}{d}(\alpha d - b(1-\alpha))P_t + \frac{1}{d}(a-c)(1-\alpha).$$

Позначимо $A = \frac{1}{d}(\alpha d - b(1-\alpha))$, $B = \frac{1}{d}(a-c)(1-\alpha)$, тоді останнє рівняння набуде вигляду

$$P_{t+1} = AP_t + B. \tag{11}$$

Спочатку, як і у випадку «павутинної» моделі, знайдемо рівноважну ціну. Визначимо її з рівняння $P^* = B + AP^*$: $B = (1-A)\cdot P^*$, звідки

$$P^* = \frac{B}{1-A} = \frac{\frac{1}{d}(a-c)(1-\alpha)}{1 - \frac{1}{d}(\alpha d - b(1-\alpha))} = \frac{(a-c)(1-\alpha)}{d - \alpha d + b - \alpha b} = \frac{(a-c)(1-\alpha)}{d + b - \alpha(d+b)} = \frac{(a-c)(1-\alpha)}{(d+b)(1-\alpha)} = \frac{(a-c)}{(d+b)}.$$

Дістали не залежний від часу розв'язок $P_t = P^*$, це така ж точка рівноваги, як і у випадку «павутинної» моделі, для будь-якого значення t. Оскільки $c > a > 0$, $b > 0$, $d > 0$, то $P^* > 0$. Для цієї ціни рівноважний обсяг виробництва Q^* визначається з рівняння $Q^* = S^* = c - d\cdot P^* = a + b\cdot P^*$ і дорівнює $Q^* = \frac{bc+ad}{b+d}$.

Зауважимо, що динамічний розв'язок моделі збігається з ціною ринкової рівноваги в статичній моделі $Q(P) = S(P)$, де $Q(P)$ функція попиту, а $S(P)$ – функція пропозиції. В цьому неважко переконатись, як і для попередньої моделі, дістанемо $P = \frac{c-a}{b+d}$.

Розглянемо випадок, коли початкова точка не збігається з рівноважною та дослідимо тенденцію цін і обсягів виробництва в цьому випадку. Задаючи певну початкову ціну та певний початковий обсяг товару і згідно з процедурою розрахунків за моделлю, виведемо формулу, яка визначає траєкторію зміни ціни в цій моделі. Нехай P_0 – початкова ціна. Знайдемо $P_1, P_2, P_3, ..., P_t$, послідовно підставляючи $P_i, i = 1,2,3,\dots,t,\dots$ у рівняння (11), дістанемо:

$$P_1 = B + AP_0,$$

$$P_2 = B + AP_1 = B + A(B + AP_0) = B + AB + A^2P_0 = B(1 + A) + A^2P_0,$$

$$P_3 = B + AP_2 = B + A(B(1 + A) + A^2P_0) = B + AB(1 + A) + A^3P_0 =$$

$$= B(1 + A + A^2) + A^3P_0,\ \ P_4 = B + AP_3 = B + A(B(1 + A + A^2) + A^3P_0) =$$

$$= B + AB(1 + A + A^2) + A^4P_0 =$$

$$= B(1 + A + A^2 + A^3) + A^4P_0,\dots,P_t = B + AP_{t-1} = B + A(B(1 + A + A^2+\dots+A^{t-2}) + A^{t-1}P_0) =$$

$$= B + AB(1 + A + A^2+\dots+A^{t-2}) + A^tP_0 = B(1 + A + A^2 + A^3\dots+A^{t-1}) + A^tP_0.$$

Отже, дістали рекурентне співвідношення

$$P_t = B(1 + A + A^2 + A^3\dots+A^{t-1}) + A^tP_0. \tag{12}$$

Вираз $(1 + A + A^2 + A^3 \dots + A^{t-1})$ є сумою t членів геометричної прогресії. За формулою суми n перших членів геометричної прогресії дістаємо формулу для ціни P_t у будь-який момент часу t: $P_t = B\frac{1-A^{t-1}}{1-A} + (A)^tP_0$, або $P_t = \frac{a-c}{b+d}(1 - A^{t-1}) + (A)^tP_0$. Цей розв’язок є асимптотично стійким за умови $|A| < 1$, тобто

$$\begin{cases}\dfrac{\alpha d-(1-\alpha)b}{d}<1,\\ \dfrac{\alpha d-(1-\alpha)b}{d}>-1,\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{\alpha d-b+\alpha b-d}{d}<0,\\ \dfrac{\alpha d-b+\alpha b+d}{d}>0,\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{\alpha(d+b)-(b+d)}{d}<0,\\ \dfrac{\alpha(d+b)-b+d}{d}>0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{(\alpha-1)(b+d)}{d}<0,\\ \dfrac{\alpha(d+b)-b+d}{d}>0,\end{cases} \text{звідки} \begin{cases}\alpha<1,\\ \alpha>\dfrac{b-d}{b+d},\end{cases} \text{тобто } \frac{b-d}{b+d} < \alpha < 1.$$

Отже, більш гнучке врахування коливань, ніж у моделі (7), дозволяє продавцю стабілізувати ринок для будь-яких кутових коефіцієнтів прямих попиту та пропозиції.

Розглянемо іншу динамічну взаємодію попиту та пропозиції, при якій попит в конкретний момент часу дорівнює сумарній пропозиції від усіх минулих часових кроків. Найбільш простою [3] моделлю розподіленого запізнювання вважається спадна геометрична прогресія, яка має смисл «динамічної пам’яті» про попередні стани досліджуваної системи. Розглядатимемо модель взаємодії попиту та пропозиції як функції ціни в дискретному часі, тобто час приймає тільки цілочисельні значення $t = 0,1,2,3, ..., n$, а ціна визначається відповідно як $p(0), p(1), p(2), p(3),\dots, p(n)$. При цьому допускається, що явний вигляд у функцій попиту та пропозиції задано. Таку модель подамо у вигляді співвідношення

$$Q(p_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n} (1-k)k^{n-i}S(p_i), \tag{13}$$

де $0 < k < 1$ знаменник спадної геометричної прогресії. Виконаємо над (13) наступні перетворення та дістанемо

$$Q(p_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n-1} (1-k)k^{n-i}S(p_i) + (1-k)S(p_n), \text{ або}$$

$$Q(p_{n+1}) = k\sum_{i=0}^{n-1} (1-k)k^{n-i-1}S(p_i) + (1-k)S(p_n). \tag{14}$$

З урахуванням (14) та (13) для цілочисельних t знайдемо

$$\Delta Q(p_n) = Q(p_{n+1}) - Q(p_n) = k\sum_{i=0}^{n-1} (1-k)k^{n-i-1}S(p_i) + (1-k)S(p_n) - \sum_{i=0}^{n-1} (1-k)k^{n-i-1}S(p_i) =$$

$$= (k-1)\sum_{i=0}^{n-1} (1-k)k^{n-i-1}S(p_i) + (1-k)S(p_n) = -(1-k)\sum_{i=0}^{n-1} (1-k)k^{n-i-1}S(p_i) + (1-k)S(p_n) =$$

$$= -(1-k)Q(p_n) + (1-k)S(p_n) = (1-k)(S(p_n) - Q(p_n)),$$

тобто

$$\Delta Q(p_n) = (1-k)(S(p_n) - Q(p_n)). \tag{15}$$

За аналогією з формулою (5) можна стверджувати: у випадку геометрично розподіленого запізнення приріст попиту пропорційний фактичній різниці між попитом та пропозицією.

Припустимо тепер, що на ринку має місце така ситуація, коли залежності попиту і пропозиції є лінійними, тобто задаються співвідношеннями (5). Як показано вище, єдине положення рівноваги в цьому випадку визначається рівністю

$$p^* = \frac{c-a}{b+d}. \qquad (16)$$

В умовах дії моделі (3) має місце рівність

$$c - dp_{n+1} = a + bp_n \qquad (17)$$

із системи (6) та (9).

У випадку економічного механізму формування ринкової ціни з урахуванням ефекту післядії, що описується рівняннями (15), (5) та (16), дістанемо різницеве співвідношення:

$$Q(p_{n+1}) - Q(p_n) = (1-k)(S(p_n) - Q(p_n)),$$

з урахуванням (5) маємо

$$a + bp_{n+1} - (a + bp_n) = (1-k)(-dp_n + c - a - bp_n),$$

або $b(p_{n+1} - p_n) = (1-k)(-(d+b)p_n + c - a)$.

Позначимо $\tilde{p}_n = p_n - p^*$, тоді остання рівність набуде вигляду

$$b(p_{n+1} - p^*) - b(p_n - p^*) = (1-k)(-(d+b)(p_n - p^*) - (d+b)p^* + c - a),$$

$$b\tilde{p}_{n+1} = b\tilde{p}_n - (1-k)(d+b)\tilde{p}_n,$$

звідки знайдемо $\tilde{p}_{n+1} = \tilde{p}_n - \frac{1-k}{b}(d+b)\tilde{p}_n$, або $\tilde{p}_{n+1} = \left(\frac{b-d+kd-b+kb)}{b}\right)\tilde{p}_n$,

$$\tilde{p}_{n+1} = \left(k - \frac{d(1-k)}{b}\right)\tilde{p}_n. \qquad (18)$$

Знайдемо розв'язок рівняння (18). Нехай p_0 відомо, тоді

$\tilde{p}_1 = \left(k - \frac{d(1-k)}{b}\right)\tilde{p}_0 = \left(k - \frac{d(1-k)}{b}\right)(p_0 - p^*)$, $\tilde{p}_2 = \left(k - \frac{d(1-k)}{b}\right)\tilde{p}_1 = \left(k - \frac{d(1-k)}{b}\right)^2 (p_0 - p^*)$,

$\tilde{p}_3 = \left(k - \frac{d(1-k)}{b}\right)\tilde{p}_2 = \left(k - \frac{d(1-k)}{b}\right)^3 (p_0 - p^*), \ldots, \tilde{p}_n = \left(k - \frac{d(1-k)}{b}\right)\tilde{p}_{n-1} = \left(k - \frac{d(1-k)}{b}\right)^n (p_0 - p^*)$.

Повернемося до початкової змінної p_n, дістанемо: $p_n - p^* = \left(k - \frac{d(1-k)}{b}\right)^n (p_0 - p^*)$, звідки

$$p_n = p^* + \left(k - \frac{d(1-k)}{b}\right)^n (p_0 - p^*). \qquad (19)$$

Розв'язок (19) був ***стійкий,*** якщо $\left|k - \frac{d(1-k)}{b}\right| < 1$, що рівносильно системі нерівностей

$$\begin{cases} k - \frac{d(1-k)}{b} < 1, \\ k - \frac{d(1-k)}{b} > -1, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \frac{d(1-k)}{b} + (1-k) > 0, \\ \frac{d(1-k)}{b} - (1+k) < 0, \end{cases} \quad \text{тобто} \quad \begin{cases} (1-k)(\frac{d}{b} + 1) > 0, \\ \frac{d(1-k)}{b} < 1 + k. \end{cases}$$

Оскільки $0 < k < 1$, то $-1 < k - 1 < 0$, тому $0 < 1 - k < 1$, тоді перша нерівність системи рівносильна нерівності $\frac{d}{b} + 1 > 0$, тобто $\frac{d}{b} > -1$. Але $0 < b < 1$, $d > 0$, тому $\frac{d}{b} > 0$. Завдяки тому, що $1 - k > 0$, тому в другій нерівності останньої системи поділимо обидві частини нерівності на $1 - k > 0$, знайдемо $\frac{d}{b} < \frac{1+k}{1-k}$. Отже, $0 < \frac{d}{b} < \frac{1+k}{1-k}$.

Зауважимо, що $\frac{1+k}{1-k} > 1$ для будь-яких $k (0 < k < 1)$.

Висновки. Автори проаналізували та узагальнили матеріали публікацій та подали методи розв'язання різницевих рівнянь та систем різницевих рівнянь, що описують динамічну модель ринку деякого товару (так звану павутинну модель ринку), а також модифікацію простішої павутиноподібної моделі, у якій ціна на ринку встановлюється продавцями тощо. Особливу увагу приділено процесам, що моделюються за допомогою апарату лінійних різницевих рівнянь першого порядку. Представлено види моделей та проаналізовано властивості загальних розв'язків деяких типів різницевих рівнянь, досліджено стійкість розв'язків цих систем. Основний акцент зроблено на застосуванні різницевих рівнянь першого порядку до розв'язання соціально-економічних моделей.

Література:

1. Грисенко М. В. Математика для економістів: Методи й моделі, приклади й задачі : навч. посібник. Київ : Либідь, 2007.

Hrysenko M.V. (2007). *Matematyka dlya ekonomistiv:* navchalniy posibnyk. [Metody Mathematics for economists: Methods and models, examples and problems: the manual]. Kyiv: Lybid. [In Ukrainian].

2. Зінькевич Т. О., Лісовська В. П., Мельник О. О. Логістичні моделі в задачах економічної динаміки. *Ринок цінних паперів України.* 2015. № 9–10. С. 127–134.

Zinkevych T.O., Lisovska V.P., Melnyk O.O. (2015). Logistychni modeli v zadachah ekonomichnoi dynamiky [Logistic models in problems of economic dynamics]. *Rynok tsinnih paperiv Ukrainy [Securities market of Ukraine]*, 9-10, 127-134. [In Ukrainian].

3. Лісовська В. П., Зінькевич Т. О. Динамічні системи в економіці : монографія. Київ : КНЕУ, 2021.

Lisovska V.P., Zinkevych T.O. (2021). *Dynamichni systemy v ekonomitsi*: monografiia [Dynamic systems in the economy] Kyiv: KNEU. [In Ukrainian].

4. Лісовська В. П., Неня О. І. Про перманентність дискретної системи хижак-жертва з монотонною функцією впливу. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія «Фізико-математичні науки» : зб. наук. праць.* 2014. № 11. С. 132–142.

Lisovska V.P., Nenya O.I. (2014). Pro permanentnist' dyskretnoy systemy khuzhak-zhertva z monotonnoyu funktsieyu vplyvu [On the permanence of a discrete predator-prey system with a monotonic influence function]. *Matematychne ta komp'yuterne modelyuvannya. Seriya Phizyko-matematychni nauky: zbirnyk naukovyh prats' [Mathematical and computer modeling. Series Physical and mathematical sciences: coll. of science works].* 11, 132-142. [In Ukrainian].

5. Лісовська В. П., Кудик Т. О., Васильєва Д. О. Моделювання лінійними різницевими рівняннями першого порядку. *Науковий вісник УжНУ. Серія: Міжнародні економічні відносини та світове господарство.* 2021. № 37. С. 55–60.

Lisovska V.P., Kudyk T.O., Vasylieva D.O. (2021). Modelyuvannya liniynymy riznytsevymy rivnyannyamy pershogo poryadku [Modeling by linear differential equations of the first order]. *Naukoviy visnyk UzhNU. Seriya: Mizhnarodni ekonomichni vidnosyny ta svitove gospodarstvo. [Scientific Bulletin of UzhNU. Series: International economic relations and the world economy]*. 37, 55-60. [In Ukrainian].