



Отримано: 23 березня 2026 р.

Прорецензовано: 9 квітня 2026 р.

Прийнято до друку: 20 квітня 2026 р.

email: zinkevych.tetyana@kneu.edu.ua

ORCID-ідентифікатор: <https://orcid.org/0000-0002-4200-6609>

email: lisovska@kneu.edu.ua

ORCID-ідентифікатор: <https://orcid.org/0000-0001-8675-3975>

DOI: [http://doi.org/10.25264/2311-5149-2026-41\(69\)-369-379](http://doi.org/10.25264/2311-5149-2026-41(69)-369-379)

Кудик Т. О., Лісовська В. П. Фінансове моделювання та прогнозування споживчого попиту на основі функцій корисності. *Наукові записки Національного університету «Острозька академія»* : серія «Економіка». Острог : Вид-во НаУОА, червень 2026. № 41(69). С. 369–379.

УДК: 336.64:330.567.22

JEL-класифікація: G32, D11, C53

Кудик Тетяна Олексіївна,

кандидат економічних наук, доцент,

доцент кафедри корпоративних фінансів і контролінгу

Київського національного економічного університету імені Вадима Гетьмана

Лісовська Валентина Петрівна,

кандидат фізико-математичних наук, доцент,

професор кафедри вищої математики

Київського національного економічного університету імені Вадима Гетьмана

ФІНАНСОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ СПОЖИВЧОГО ПОПИТУ НА ОСНОВІ ФУНКЦІЙ КОРИСНОСТІ

У статті досліджено економіко-математичні моделі споживчого вибору на основі функцій корисності та їх застосування для аналізу і прогнозування попиту. Розглянуто різні типи функцій корисності, зокрема логарифмічні та моделі Стоуна, і на їх основі виведено відповідні функції попиту при бюджетних обмеженнях.

Отримано умови, за яких товари можуть класифікуватися як нормальні, неякісні або товари Гіффена. Показано, як зміни доходу та цін впливають на структуру споживання.

Запропоновано підхід до використання цих моделей у задачах фінансового прогнозування попиту, що дозволяє оцінювати поведінку споживачів у різних економічних ситуаціях.

Результати можуть бути використані для аналізу ринків та підтримки управлінських рішень у сфері ціноутворення та планування попиту.

Ключові слова: функція корисності, функція попиту, споживчий вибір, фінансове моделювання, фінансове прогнозування, прогнозування попиту.

Tetiana Kudyk,

PhD in Economics, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Corporate Finance and Controlling,
Vadym Hetman Kyiv National Economic University

Valentyna Lisovska,

PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Higher Mathematics,
Vadym Hetman Kyiv National Economic University

FINANCIAL MODELING AND FORECASTING OF CONSUMER DEMAND BASED ON UTILITY FUNCTIONS

This article explores the financial modeling of consumer behavior based on utility functions and its application to demand analysis and forecasting under budget constraints. At the microeconomic level, the study addresses rational consumer choice, where individuals allocate income across goods to maximize utility under specific price conditions and resource limitations.

The research evaluates various economic-mathematical models of consumer behavior, including logarithmic utility functions, Stone-type models, and generalized multiplicative utility functions. Different modeling approaches apply to the same economic object depending on analytical objectives, data availability, and market conditions. The paper examines consumer choice problems related to forming optimal bundles of goods and services, taking into account income, price structures, and individual preferences.

For each model, demand functions are derived via optimization methods, analyzing the relationships among income, prices, and consumption patterns. Particular attention is dedicated to identifying conditions under which goods are classified as normal, inferior, or Giffen goods, as well as analyzing substitution and complementarity effects.

An approach for applying utility-based models to financial demand forecasting is proposed, enabling consumer behavior evaluation under diverse economic scenarios and uncertainty factors. A numerical example illustrates the framework's practical applicability and confirms its relevance for real-world analysis.



Ultimately, the results support market analysis, demand forecasting, and managerial decision-making in pricing, planning, and resource allocation under economic uncertainty and market volatility.

Keywords: *utility function, demand function, consumer choice, financial modeling, financial forecasting, demand forecasting.*

Постановка проблеми. Ефективне функціонування будь-якої економічної системи значною мірою визначається стратегіями споживчого вибору, що робить їх пріоритетним об'єктом математичного моделювання. Є різні математичні моделі поведінки окремого споживача. Перед споживачем постає головне завдання раціонального ведення господарства. Воно полягає у вирішенні питання про те, яку кількість наявних товарів він повинен придбати за певний проміжок часу при заданих цінах і споживчому доході, щоб від цього йому була найбільша користь в умовах бюджетного обмеження [4, 14].

Будемо вважати, що I – дохід (капітал) споживача, який він готовий витратити на придбання товарів. Ціни товарів вважаються заданими. Враховуючи структуру цін, дохід та власні переваги, споживач купує певну кількість товарів (благ), і математична модель такої його поведінки називається моделлю споживчого вибору. Розглянемо різні економіко-математичні моделі, пов'язані з теорією споживання. Для початку розглянемо один з простіших прикладів споживчого вибору в просторі двох товарів, коли функція корисності задається за допомогою функції Бернуллі, $U(x_1, x_2) = a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2$, де a_1, a_2 – споживчий набір з двох благ (товарів). Вважається, що споживач про кожні два набори може сказати, що один з них – більш бажаний, ніж інший, або споживач не бачить між ними різниці [3]. Розглянемо іншу функцію корисності споживача, функцію попиту Р. Стоуна вигляду: $U(x_1, x_2) = (x_1 - a_1)^{c_1} (x_2 - a_2)^{c_2}$.

Потім дослідимо іншу модель споживання, модель Стоуна, в якій функція корисності споживача є загальною мультиплікативною функцією корисності [4, 42]: $U(x_1, x_2, \dots, x_n) = c \cdot \prod_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^{a_i}$.

Наступною розглянемо модифіковану функцію споживчої корисності Р. Стоуна

$u(x) = (x_1 + x_2 - b)x_2^{\alpha_2} \prod_{k=3}^n (x_k - a_k)^{\alpha_k}$ для опису зміни структури харчування. І, нарешті, розглянемо приклад споживчого вибору товарів першої потреби і товарів розкоші в просторі двох товарів R_+^2 , який можна зобразити функцією корисності вигляду $U(x_1, x_2) = x_1^\alpha \cdot x_2^{\beta-\alpha} \cdot (x_1 + \beta - \alpha)^{-\beta}$, $x_1, x_2 \geq 0$.

Таким чином, систематизуємо різні моделі споживчого вибору та для кожної з наведених моделей, при заданому бюджетному обмеженні, виведемо умови, за яких про той чи інший товар можна сказати, що він є нормальним (цінним, або малоцінним), чи товари є взаємозамінними (взаємодоповнювальними), або товарами Гіффена (товари Гіффена – це товари першої необхідності, попит на які зростає при підвищенні їх ціни). Також з'ясуємо питання про те, чи залежить попит на кожний товар від зміни цін на інший товар і як змінюється попит на той чи інший товар із зростанням доходу.

Аналіз останніх досліджень та публікацій.

Дослідження загальної теорії споживчого вибору проведено, зокрема, в роботах [1; 3–5], в яких розглянуто низку найпоширеніших економіко-математичних моделей, що пов'язані з теорією споживання, виробництва, заощаджень, загальної економічної рівноваги, тощо.

У міжнародній науковій літературі теорія споживчого вибору та функцій попиту ґрунтовно досліджена у працях Varian, Mas-Colell et al., Deaton and Muellbauer [7–10], де сформульовано базові підходи до аналізу функцій корисності та поведінки споживача. У новітніх дослідженнях значна увага приділяється емпіричному аналізу попиту та використанню великих масивів даних, а також інтеграції поведінкових факторів у моделі споживчого вибору [6; 11–13].

Потреба в точних кількісних моделях при господарюванні та веденні ділових операцій була усвідомлена давно. Розробці та дослідженню математичних моделей поведінки споживача присвячено роботи багатьох зарубіжних та вітчизняних вчених. Вагомий внесок у розроблення вище названих проблем внесли англійський економіст Дж. Р. Стоун, видатний український економіст, статистик і математик Є. Є. Слуцький. Важливу роль у вивченні теорії граничної корисності відіграли представники математичної школи в економіці Х. Госсен у Німеччині, В. Джевонс та Ф. Еджворт у Великій Британії, Л. Вальрас у Швейцарії та ін. В роботах [4; 5] розглянуто низку важливих прикладів, що розкривають особливості оптимального вибору споживача в різних ситуаціях.

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є системний аналіз та фінансове моделювання варіативних стратегій споживчого вибору, а також демонстрація практичного застосування моделей для фінансового прогнозування попиту. До завдань дослідження входить: узагальнення математичних підходів до побудови функцій корисності; виведення функцій попиту для різних категорій благ; а також обґрунтування методології фінансового прогнозування динаміки попиту на товари першої необхідності та предмети розкоші при зростанні капіталу споживача.



Наукова новизна дослідження полягає у розширенні класичної моделі Стоуна через введення специфічних параметрів для товарів Гіффена та предметів розкоші, що дозволяє точніше прогнозувати попит в умовах різкої зміни доходів населення.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо різні важливі приклади споживчого вибору, які розкривають певні особливості вибору споживача в різних ситуаціях. Спочатку розглянемо один з простіших прикладів споживчого вибору в просторі двох товарів. Нехай корисність задається функцією Бернуллі

$$U(x_1, x_2) = a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2, \quad (1)$$

a_1, a_2 – задані константи, причому $a_1, a_2 > 0$.

Нехай x_1, x_2 – відповідно кількість одиниць товарів № 1 та № 2, а p_1, p_2 – ринкові ціни однієї одиниці товарів № 1 та № 2 відповідно. Вибір товарів першої потреби і товарів розкоші можна подати функцією корисності вигляду (1).

Нехай дохід (капітал) I споживача, який він готовий витратити на придбання товарів, перевищує вартість мінімального споживчого кошика

$\vec{x} = (x_1, x_2) \geq 0$, тобто має місце стандартне бюджетне обмеження

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq I. \quad (2)$$

Задачу споживчого вибору можна замінити задачею на умовний екстремум функції (1) за умови (2). Задача знаходження функцій попиту $x_1^* = \varphi_1(p_1, p_2, I)$, $x_2^* = \varphi_2(p_1, p_2, I)$ на товари № 1 та № 2 відповідно, які характеризують оптимальний вибір споживача, зводиться до знаходження максимуму функції корисності (1) при бюджетному обмеженні (2).

Функція Лагранжа має вигляд [2, 67]

$$L(x_1, x_2, \lambda) = U(x_1, x_2) + \lambda(I - \sum_{i=1}^2 p_i x_i),$$

тобто

$$L(x_1, x_2, \lambda) = a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2 + \lambda(I - p_1 x_1 - p_2 x_2).$$

Знайдемо частинні похідні $\frac{\partial L}{\partial x_1}, \frac{\partial L}{\partial x_2}, \frac{\partial L}{\partial \lambda}$:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = a_1 \frac{1}{x_1} - \lambda p_1,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = a_2 \frac{1}{x_2} - \lambda p_2,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = I - p_1 x_1 - p_2 x_2.$$

Необхідними умовами оптимальності розв'язку x_1^*, x_2^* і множника λ^* є рівність нулю частинних похідних по всім змінним [3, 121]:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0.$$

Функції попиту (x_1^*, x_2^*) задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_1 \frac{1}{x_1} - \lambda p_1 = 0, \\ a_2 \frac{1}{x_2} - \lambda p_2 = 0, \\ I - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Розв'язок системи (3) лежить на так званій бюджетній прямій $I - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$, або

$$\left(\frac{x_1}{p_1} + \frac{x_2}{p_2} = 1 \right).$$

Розв'яжемо систему (3), отримаємо функції попиту:

$x_1^* = \varphi_1(p_1, p_2, I)$, $x_2^* = \varphi_2(p_1, p_2, I)$ на товари № 1 та № 2 відповідно та значення λ^* :

$$\begin{cases} x_1^* = \frac{a_1}{(a_2 + a_1)} \frac{I}{p_1}, \\ x_2^* = \frac{a_2}{(a_2 + a_1)} \frac{I}{p_2}, \\ \lambda^* = \frac{a_2 + a_1}{I}. \end{cases} \quad (4)$$



З (4) робимо висновок: якщо усі ціни і дохід I змінюються (збільшуються чи зменшуються) в одну й ту ж кількість разів, то величина попиту на товар (перший чи другий) залишається незмінною. При цьому маємо, що попит на перший товар не залежить від ціни на другий товар і попит на другий товар також не залежить від ціни на перший товар.

Оскільки

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} = -\frac{Ia_1}{(a_2+a_1)p_1^2} < 0 \quad ; \quad \frac{\partial x_2^*}{\partial p_2} = -\frac{Ia_2}{(a_2+a_1)p_2^2} < 0,$$

то кожний товар (перший і другий) не є товарами Гіффена (товари Гіффена – це товари першої необхідності, попит на які зростає при підвищенні їх ціни. Це бюджетні товари, які споживаються щодня), а в нашому випадку зі зростанням цін попит на них зменшується і відповідно попит зростає з пониженням цін на товари відповідно. Окрім того, обидва товари є нейтральними один до одного, бо попит на кожний товар не залежить від зміни ціни на інший товар:

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial p_2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial x_2^*}{\partial p_1} = 0.$$

Розглянемо функцію (4) попиту першого товару. Частинна похідна її за доходом має вигляд

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial I} = \frac{a_1}{(a_1+a_2)p_1} \quad ; \quad \frac{\partial x_1^*}{\partial I} > 0, \text{ оскільки } a_1, a_2, p_1 \text{ (а тому і їхній добуток) більше нуля.}$$

Аналогічно знайдемо:

$$\frac{\partial x_2^*}{\partial I} : \frac{\partial x_2^*}{\partial I} = \frac{a_2}{(a_1+a_2)p_2} > 0.$$

У цьому випадку попит на перший і на другий товари відповідно із зростанням доходу зростає, тобто перший (і другий) товар є нормальним, більше того, цінними товарами. Інакше, зниження доходу тягне за собою зниження попиту і на перший, і на другий товари. Нормальний товар не може бути товаром Гіффена.

Непряма функція корисності споживача має вигляд:

$$\begin{aligned} V(p_1, p_2, I) &= U(x_1^*, x_2^*) = a_1 \ln \frac{a_1}{(a_2+a_1)p_1} + a_2 \ln \frac{a_2}{(a_2+a_1)p_2} = \\ &= a_1 (\ln I + \ln \frac{a_1}{(a_2+a_1)p_1}) + a_2 (\ln I + \ln \frac{a_2}{(a_2+a_1)p_2}). \end{aligned} \quad (5)$$

Продиференціюємо останню рівність за змінною I , дістанемо

$$\frac{\partial V}{\partial I} = a_1 \frac{1}{I} + a_2 \frac{1}{I} = \frac{a_1+a_2}{I} > 0.$$

Тоді

$$\lambda^* = \frac{a_2+a_1}{I} = \frac{\partial V}{\partial I} = \Lambda(p_1, p_2, I) -$$

функція граничної корисності доходу споживача.

Отже, маємо, $\Lambda = \frac{\partial V}{\partial I} = \frac{\partial U(x_1^*, x_2^*)}{\partial I}$.

Знайдемо граничні корисності споживача за i -тим товаром:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_1^*} &= \frac{a_1}{x_1^*} = \frac{a_1}{\frac{a_1}{(a_2+a_1)p_1} I} = \frac{(a_2+a_1)p_1}{I} > 0, \\ \frac{\partial U}{\partial x_2^*} &= \frac{a_2}{x_2^*} = \frac{a_2}{\frac{a_2}{(a_2+a_1)p_2} I} = \frac{(a_2+a_1)p_2}{I} > 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Отже,

$$p_2 \cdot \frac{\partial U}{\partial x_1^*} = p_1 \cdot \frac{\partial U}{\partial x_2^*}, \text{ або } \frac{1}{p_1} \cdot \frac{\partial U}{\partial x_1^*} = \frac{1}{p_2} \cdot \frac{\partial U}{\partial x_2^*}.$$

Враховуючи (6), дістанемо

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x_1^*}}{\frac{\partial U}{\partial x_2^*}} = \frac{a_1 x_2^*}{a_2 x_1^*} = \frac{a_1 \frac{Ia_2}{(a_2+a_1)p_2}}{a_2 \frac{Ia_1}{(a_2+a_1)p_1}} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Відношення $\frac{\partial U}{\partial x_2^*} -$ гранична норма заміни першого товару (продукту) другим в точці локальної рівноваги (x_1^*, x_2^*) . Вона дорівнює відношенню ринкових цін $\frac{p_1}{p_2}$ на товари (продукти).



Розглянемо іншу функцію корисності споживача, функцію попиту Р. Стоуна вигляду:

$$U(x_1, x_2) = (x_1 - a_1)^{c_1} (x_2 - a_2)^{c_2}, \quad (7)$$

де a_1, a_2, c_1, c_2 – задані константи, причому зазвичай зазначають, що $c_1 + c_2 = 1$.

Дослідимо функцію (7) за аналогічним алгоритмом, що й (1).

Нехай дохід (капітал) I споживача, який він готовий витратити на придбання товарів, перевищує вар-тість мінімального споживчого кошика $\vec{x} = (x_1, x_2) \geq 0$, тобто має місце стандартне бюджетне обмеження (2).

Функція Лагранжа при умовах (7), (2) має вигляд:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = U(x_1, x_2) + \lambda(I - \sum_{i=1}^2 p_i x_i),$$

тобто

$$L(x_1, x_2, \lambda) = (x_1 - a_1)^{c_1} (x_2 - a_2)^{c_2} + \lambda(I - p_1 x_1 - p_2 x_2).$$

Знайдемо частинні похідні $\frac{\partial L}{\partial x_1}, \frac{\partial L}{\partial x_2}, \frac{\partial L}{\partial \lambda}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= c_1 \cdot (x_1 - a_1)^{c_1-1} (x_2 - a_2)^{c_2} - \lambda p_1, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = c_2 \cdot (x_1 - a_1)^{c_1} (x_2 - a_2)^{c_2-1} - \lambda p_2, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \\ &= I - p_1 x_1 - p_2 x_2 \end{aligned}$$

та прирівняємо їх до нуля (необхідна умова екстремуму функції Лагранжа).

Оптимальне споживання (x_1^*, x_2^*) задовольняє систему рівнянь:

$$\begin{cases} c_1 \cdot (x_1 - a_1)^{c_1-1} (x_2 - a_2)^{c_2} - \lambda p_1 = 0, \\ c_2 \cdot (x_1 - a_1)^{c_1} (x_2 - a_2)^{c_2-1} - \lambda p_2 = 0, \\ I - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Розв'яжемо систему рівнянь (8):

$$\begin{cases} \lambda = \frac{c_1 \cdot (x_1 - a_1)^{c_1-1} (x_2 - a_2)^{c_2}}{p_1}, \\ (x_1 - a_1)^{c_1-1} (x_2 - a_2)^{c_2-1} (c_2 (x_1 - a_1) - \frac{c_1 \cdot (x_2 - a_2)}{p_1} p_2) = 0, \\ p_2 x_2 = I - p_1 x_1. \end{cases}$$

Розглянемо друге рівняння останньої системи. Оскільки $x_1 \neq a_1, x_2 \neq a_2$,

$$\text{тоді } c_2 (x_1 - a_1) - \frac{c_1 \cdot (x_2 - a_2)}{p_1} p_2 = 0$$

Підставимо сюди $p_2 x_2$ з третього рівняння останньої системи, знайдемо $c_2 (x_1 - a_1) - \frac{c_1 \cdot (I - p_1 x_1)}{p_1} + \frac{p_2 c_1 a_2}{p_1} = 0$, звідки $x_1 = \frac{c_1 I + p_1 c_2 a_1 - p_2 c_1 a_2}{p_1 (c_1 + c_2)}$. Тоді $x_2 = \frac{I - p_1 x_1}{p_2} = \frac{c_2 I + p_2 c_1 a_2 - p_1 c_2 a_1}{p_2 (c_1 + c_2)}$.

$$\text{Оскільки } c_1 + c_2 = 1, \text{ то } x_1^* = \frac{c_1 I + p_1 c_2 a_1 - p_2 c_1 a_2}{p_1}, \quad x_2^* = \frac{c_2 I + p_2 c_1 a_2 - p_1 c_2 a_1}{p_2},$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{c_1 \cdot (\frac{c_1 I + p_1 c_2 a_1 - p_2 c_1 a_2}{p_1} - a_1)^{c_1-1} (\frac{c_2 I + p_2 c_1 a_2 - p_1 c_2 a_1}{p_2} - a_2)^{c_2}}{p_1} = \\ &= \frac{c_1}{p_1} \left(\frac{p_2 c_1}{p_1 c_2} \right)^{c_1-1} = \frac{c_1}{p_1} \left(\frac{p_1 c_2}{p_2 c_1} \right)^{1-c_1} = \frac{c_1}{p_1} \left(\frac{p_2 c_1}{p_1 c_2} \right)^{c_2}. \end{aligned}$$

Отже, функції попиту Стоуна набувають вигляду:

$$\text{то } x_1^* = \frac{c_1 I + p_1 c_2 a_1 - p_2 c_1 a_2}{p_1} = a_1 + \frac{c_1}{p_1} (I - p_1 a_1 - p_2 a_2), \quad (9)$$

$$x_2^* = \frac{c_2 I + p_2 c_1 a_2 - p_1 c_2 a_1}{p_2} = a_2 + \frac{c_2}{p_2} (I - p_1 a_1 - p_2 a_2), \quad (10)$$

$$\text{а } \lambda^* = \frac{c_1}{p_1} \left(\frac{p_2 c_1}{p_1 c_2} \right)^{c_2}.$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} &= \frac{p_1 c_2 a_1 - (c_1 I + p_1 c_2 a_1 - p_2 c_1 a_2)}{(p_1)^2} = \frac{p_1 c_2 a_1 - c_1 I - p_1 c_2 a_1 + p_2 c_1 a_2}{(p_1)^2} = \\ &= \frac{c_1}{(p_1)^2} (p_2 a_2 - I) < 0, \quad \text{і } \frac{\partial x_2^*}{\partial p_2} = \frac{c_2}{(p_2)^2} (p_1 a_1 - I) < 0, \end{aligned}$$



то кожний товар (перший і другий) є нормальними, тобто зростання ціни товару призводить до зменшення попиту на нього.

Розглянемо функцію (9) попиту першого товару.

Частинна похідна її за доходом має вигляд $\frac{\partial x_1^*}{\partial I} = \frac{c_1}{p_1} \cdot \frac{\partial x_1^*}{\partial I} > 0$, оскільки c_1, p_1 (а тому і їхня частка) більше нуля. У цьому випадку попит на перший товар із зростанням доходу зростає, тобто перший товар є нормальним, більше того, цінним товаром. Нормальний товар не може бути товаром Гіффена.

Знайдемо з (10) $\frac{\partial x_2}{\partial I}$: $\frac{\partial x_2}{\partial I} = \frac{c_2}{p_2} > 0$.

Отже, і другий товар є нормальним, також цінним товаром.

Інакше, зниження доходу тягне за собою зниження попиту і на перший, і на другий товари.

Непряма функція корисності споживача має вигляд:

$$V(p_1, p_2, I) = U(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{c_1 p_2}{p_1 c_2}\right)^{c_1} \cdot \frac{c_2}{p_2} (I - (p_2 a_2 + p_1 a_1)). \quad (11)$$

Продиференціюємо рівність (11) за змінною I , отримуємо

$$\frac{\partial V}{\partial I} = \left(\frac{c_1 p_2}{p_1 c_2}\right)^{c_1} \cdot \frac{c_2}{p_2} \cdot \frac{\partial V}{\partial I} > 0.$$

Знайдемо

$$\lambda^* = \frac{c_1}{p_1} \left(\frac{p_1 c_2}{p_2 c_1}\right)^{c_2} = \frac{c_1}{p_1} \left(\frac{p_1 c_2}{p_2 c_1}\right)^{1-c_1} = \frac{c_1 p_1 c_2}{p_1 p_2 c_1} \left(\frac{p_2 c_1}{p_1 c_2}\right)^{c_1} = \left(\frac{c_1 p_2}{p_1 c_2}\right)^{c_1} \cdot \frac{c_2}{p_2} = \Lambda(p_1, p_2, I) -$$

функція граничної корисності доходу споживача.

Отже, маємо, $\Lambda = \frac{\partial V}{\partial I}$

Знайдемо граничні корисності споживача за i -тим товаром:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1^*} = (x_2^* - a_2)^{c_2} c_1 (x_1^* - a_1)^{c_1-1}.$$

Оскільки $c_1 + c_2 = 1$, то $c_1 - 1 = -c_2$, тоді

$$\frac{\partial U}{\partial x_1^*} = \left(\frac{c_2 I + p_2 c_1 a_2 - p_1 c_2 a_1 - p_2 a_2}{p_2}\right)^{c_2} \cdot c_1 \left(\frac{c_1 I + p_1 c_2 a_1 - p_2 c_1 a_2 - p_1 a_1}{p_1}\right)^{-c_2}$$

В результаті перетворень, отримаємо:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1^*} = c_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{c_2}{c_1}\right)^{c_2}. \quad (12)$$

Аналогічно обчислимо та після перетворень, знайдемо

$$\frac{\partial U}{\partial x_2^*} = c_2 \left(\frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{c_1}{c_2}\right)^{c_1}. \quad (13)$$

Враховуючи (12), (13), дістанемо співвідношення

$$\frac{1}{p_1} \cdot \frac{\partial U}{\partial x_1^*} = \frac{1}{p_2} \cdot \frac{\partial U}{\partial x_2^*}.$$

Тепер розглянемо іншу модель споживання Стоуна, в якій функція корисності споживача є загальною мультиплікативною функцією корисності [4, 42]:

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = c \cdot \prod_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^{\alpha_i}. \quad (14)$$

Дослідження проводимо аналогічно, як і у випадку функції корисності (1) та (7). В результаті проведених аналогічних перетворень, знайдемо функції попиту

$$x_i^* = \bar{x}_i + \frac{\alpha_i (I - \sum_{i=1}^n p_i \bar{x}_i)}{p_i (\sum_{i=1}^n \alpha_i)}. \quad (15)$$

Зокрема, коли в моделі Стоуна всі товари є товарами вибору, тобто серед них немає товарів першої потреби, тоді всі $\bar{x}_i = 0$ й усі параметри α_i рівні між собою ($\alpha_i = \alpha, i = 1, 2, \dots, n$), то функції попиту мають вигляд

$$x_i^* = \frac{I}{np_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Це означає, що дохід розподіляється на n однакових частин. Попит на кожний товар є оберненим до ціни на нього товар і необмежено зростає, коли $I \rightarrow \infty$: $\frac{I}{np_i} = \infty$. При цьому $\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} = 0, j \neq i$, то усі товари є



нейтральними один до одного (попит на кожний товар не залежить від зміни цін на інші товари). У цій моделі функція непрямой корисності (з урахуванням (15)) має вигляд

$$V(p, I) = U(x_1^*, x_2^*) = c \cdot \prod_{i=1}^n \left(\frac{\alpha_i(I - \sum_{l=1}^n p_l x_l)}{p_i \sum_{l=1}^n \alpha_l} \right)^{\alpha_i},$$

а функція граничної корисності доходу споживача

$$\Lambda(p, I) = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i}{I - \sum_{i=1}^n p_i x_i} V(p, I),$$

де p – вектор-стовпець цін.

Для опису зміни структури харчування пропонується модифікована функція споживчої корисності Р. Стоуна:

$$u(x) = (x_1 + x_2 - b)x_2^{\alpha_2} \prod_{k=3}^n (x_k - a_k)^{\alpha_k}, \quad (16)$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, x_k – кількість товару, a_k – постійні коефіцієнти. Вони характеризують відносний ступінь переваги товару k ; b – необхідна сумарна кількість двох взаємозамінних товарів (вважаємо, що один із товарів дешевше за інший). В якості цих товарів можна розглядати, наприклад, овочі і фрукти або хліб і картоплю тощо. Функція (16) відрізняється від функції корисності Р. Стоуна тільки множниками $(x_1 + x_2 - b)$ та $x_2^{\alpha_2}$. Перший множник має враховувати бажання споживача придбати якомога більше за масою продуктів харчування, незалежно від виду продуктів. Другий множник $x_2^{\alpha_2}$ має відобразити бажання споживача купити разом з тим і деяку кількість іншого (не найдешевшого) продукту. Як і в моделях (1), (7), (14) потрібно знайти такі функції попиту x_k , для яких функція корисності $u(x)$ набудатиме максимального значення при бюджетному обмеженні

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = I, \quad (17)$$

де I – величина доходу, p_i – ціна одиниці товару i , причому $p_2 > p_1$.

Як і для моделей (1), (7), (14) складемо функцію Лагранжа, знайдемо частинні похідні від неї за усіма змінними x_i , та прирівняємо їх до нуля, отримаємо з урахуванням (16), (17) систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{U(x)}{x_1 + x_2 - b} + \lambda p_1 = 0, \\ \frac{U(x)}{x_1 + x_2 - b} + \frac{\alpha_2 U(x)}{x_2} + \lambda p_2 = 0, \\ \frac{\alpha_k U(x)}{x_k - a_k} + \lambda p_k = 0, \quad \forall k \geq 3. \end{cases} \quad (18)$$

де

$$L = (x_1 + x_2 - b)x_2^{\alpha_2} \prod_{k=3}^n (x_k - a_k)^{\alpha_k} + \lambda (\sum_{i=1}^n p_i x_i - I),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= x_2^{\alpha_2} \prod_{k=3}^n (x_k - a_k)^{\alpha_k} + \lambda p_1 = \frac{U(x)}{x_1 + x_2 - b} + \lambda p_1, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= x_2^{\alpha_2} \prod_{k=3}^n (x_k - a_k)^{\alpha_k} + (x_1 + x_2 - b) \prod_{k=3}^n (x_k - a_k)^{\alpha_k} \alpha_2 x_2^{\alpha_2 - 1} + \lambda p_2 = \\ &= \frac{U(x)}{x_1 + x_2 - b} + \frac{U(x) \alpha_2}{x_2} + \lambda p_2, \\ \frac{\partial L}{\partial x_k} &= \alpha_k (x_1 + x_2 - b) x_2^{\alpha_2} \prod_{k=3}^n (x_k - a_k)^{\alpha_k - 1} + \lambda p_k = \frac{\alpha_k U(x)}{x_k - a_k} + \lambda p_k, \quad \forall k \geq 3. \end{aligned}$$

Розв'язуючи систему (18), знайдем

$$\begin{aligned} x_1 &= b + \frac{1}{p_1} \left(I - p_1 b - \sum_{k=3}^n p_k a_k \right) \frac{p_2 - (1 + \alpha_2) p_1}{(p_2 - p_1) \sum_{i=1}^n \alpha_i}, \\ x_2 &= \frac{\alpha_2}{(p_2 - p_1) \sum_{i=1}^n \alpha_i} (I - p_1 b - \sum_{k=3}^n p_k a_k), \quad \dots, \\ x_k &= a_k + \frac{\alpha_k}{p_k \sum_{i=1}^n \alpha_i} (I - p_1 b - \sum_{k=3}^n p_k a_k), \quad \forall k \geq 3, \end{aligned} \quad (19)$$

а

$$\lambda = - \frac{U(x) \alpha_k}{p_k (x_k - a_k)}.$$



Функції попиту (19) майже такі ж, як і в моделі Стоуна. З (19) робимо висновок, що попит на кожне благо (для $k \geq 3$) зростає з ростом доходу і знижується з ростом ціни. Інакше кажучи, кожне з цих благ є нормальним товаром. Другий товар також є нормальним.

Розглянемо функцію попиту першого товару. Частинна похідна по доходу:

$$\frac{\partial x_1}{\partial I} = \frac{p_2 - (1 + \alpha_2)p_1}{p_1(p_2 - p_1) \sum_i \alpha_i}. \quad (20)$$

Якщо виконується умова

$$p_2 > (1 + \alpha_2)p_1, \quad (21)$$

то похідна $\frac{\partial x_1}{\partial I}$ більше нуля. У цьому випадку попит на перший товар зростає із зростанням доходу, тобто перший товар є нормальним. При цьому, як випливає з (19), він купується у кількості, яка перевищує b .

Порушення умови (21) має місце у випадку, коли величина α_2 достатньо велика, тобто якщо покупець має велике бажання купити другий (більш дорогий) товар. У цьому випадку $\frac{\partial x_1}{\partial I} < 0$. Це означає, що перший товар є товаром малоцінним.

Частинна похідна $\frac{\partial x_1}{\partial p_1}$ від величини попиту на перший товар за його ціною p_1 має вигляд

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \left(\alpha_2 \frac{\sum_{k=3}^n p_k a_k + b p_2 - I}{(p_2 - p_1)^2} - \frac{I - \sum_{k=3}^n p_k a_k}{p_1^2} \right).$$

Вона може приймати як додатні, так і від'ємні значення. Коли $\frac{\partial x_1}{\partial p_1} > 0$, то це означає, що перший товар є товаром Гіффена, бо в такому випадку з ростом ціни попит на товар зростає і, відповідно, падає зі зниженням ціни. З нерівності

$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} > 0$ впливає наступний критерій Гіффена:

$$I - \sum_{k=3}^n p_k a_k < \frac{\alpha_2 p_2 b}{(p_2 - p_1)^2 + \alpha_2}.$$

І, нарешті, розглянемо приклад споживчого вибору товарів першої потреби і товарів розкоші в просторі двох товарів R_2^+ , який можна зобразити функціями корисності вигляду

$$U(x_1, x_2) = x_1^\alpha \cdot x_2^{\beta-\alpha} \cdot (x_1 + \beta - \alpha)^{-\beta}, \quad x_1, x_2 \geq 0, \quad (22)$$

де α, β задовольняють умовам: $\alpha > 0, \beta > \alpha$. При цьому вважаємо, що один товар дешевше іншого.

Функція (22) детально досліджена в роботі [3, 118]. Аналогічно вище викладеному алгоритму, складемо функцію Лагранжа для задачі (22). Знайдено функції попиту x_1 , що максимізують функцію корисності (22) при бюджетному обмеженні:

$$\sum_{i=1}^2 p_i \cdot x_i \leq I,$$

де p_1 – ціна одиниці i -го товару, I – величина доходу:

$$x_1^* = \frac{I\alpha}{I + \beta p_1}, \quad x_2^* = \frac{I(I + p_1(\beta - \alpha))}{p_2(I + \beta p_1)}.$$

Маємо, що попит на перший товар не залежить від ціни на другий товар (він є «товаром першої необхідності»), а з формули функції попиту x_2^* для предметів розкоші видно, що попит на другий товар залежить від ціни на перший товар.

Оскільки

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} = -\frac{I\alpha\beta}{(I + \beta p_1)^2} < 0; \quad \frac{\partial x_2^*}{\partial p_2} = -\frac{I(I + p_1(\beta - \alpha))}{p_2^2(I + \beta p_1)} < 0,$$

то кожний товар (перший і другий) є нормальними, тобто зростання ціни товару призводить до зменшення попиту на нього. Також доведено, що попит на перший товар із зростанням доходу зростає, тобто перший товар є нормальним, більше того, цінним товаром, оскільки

$\frac{\partial x_1^*}{\partial I} = \frac{\alpha\beta p_1}{(I + \beta p_1)^2} > 0$, бо α, β, p_1 (а тому і їхній добуток) більше нуля. Другий товар є нормальним, також цінним товаром, оскільки

$$\frac{\partial x_2^*}{\partial I} = \frac{I^2 + 2I p_1 \beta + p_1^2 \beta (\beta - \alpha)}{p_2 (I + \beta p_1)^2} > 0, \text{ бо } \beta > \alpha. \text{ Як і у випадку моделей (1), (7), (14), доведено співвідношення}$$

$$\frac{1}{p_1} \cdot \frac{\partial U}{\partial x_1^*} = \frac{1}{p_2} \cdot \frac{\partial U}{\partial x_2^*},$$

де $\frac{\partial U}{\partial x_i^*}$ – граничні корисності споживача за i -тим товаром:



$$\frac{\partial U}{\partial x_1^*} = \frac{\alpha^\alpha (\beta - \alpha) p_1 I^{\beta-1} (I + p_1 \beta)}{\beta^\beta p_2^{\beta-\alpha} (I + p_1 (\beta - \alpha))^{\alpha+1}} > 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x_2^*} = \frac{\alpha^\alpha (\beta - \alpha) I^{\beta-1} (I + p_1 \beta)}{\beta^\beta p_2^{\beta-\alpha-1} (I + p_1 (\beta - \alpha))^{\alpha+1}}.$$

Деталізація аналітичних виведень дозволяє забезпечити відтворюваність результатів та їх подальше використання в прикладних задачах фінансового моделювання.

Отримані аналітичні залежності функцій попиту дозволяють не лише досліджувати поведінку споживача, але й застосовувати їх для практичних задач фінансового прогнозування. Розглянемо це на конкретних прикладах.

Фінансове моделювання споживчого попиту на основі функцій корисності має важливе практичне значення для бізнесу, державної політики та аналітики ринків. В порівнянні з суто теоретичних моделей, у реальних умовах параметри функцій корисності оцінюються на основі статистичних даних, що дозволяє здійснювати кількісне прогнозування попиту.

Зокрема, для функцій попиту вигляду (15) параметри α_i можуть інтерпретуватися як частки витрат на відповідні товари у бюджеті споживача.

Для ілюстрації практичного застосування моделей розглянемо умовно-реальний приклад, побудований на основі даних Державної служби статистики України щодо структури споживчих витрат домогосподарств.

За статистичними даними, значна частка витрат українських домогосподарств припадає на:

- продукти харчування (близько 45–50 %),
- непродовольчі товари та послуги (решта).

Нехай середньомісячний дохід домогосподарства становить:

$$I = 18\,000 \text{ грн}$$

Розглянемо два агреговані товари:

- 1) x_1 – продукти харчування (товари першої необхідності),
- 2) x_2 – непродовольчі товари (умовно товари вищого порядку).

Використаємо модель попиту (15).

Припустимо, що:

- $\alpha_1 = 0,5$; $\alpha_2 = 0,5$ (наближено до структури витрат),
- середня «умовна» ціна:

$$p_1 = 120 \text{ грн (харчові продукти)}, p_2 = 600 \text{ грн (непродовольчі товари)}.$$

$$\text{Тоді: } x_1^* = 0,5 \frac{18000}{120} = 75; \quad x_2^* = 0,5 \frac{18000}{600} = 15.$$

При зростанні доходу до $I = 22\,000$ грн відповідні значення попиту зміняться до:

$$x_1^* = 0,5 \frac{22000}{120} \approx 91,7; \quad x_2^* = 0,5 \frac{22000}{600} \approx 18,3.$$

Побудуємо графік попиту залежно від доходу, використовуючи модель $x_1^* = 0,5 \frac{I}{120}$.

Графік демонструє лінійну залежність попиту від доходу, що підтверджує позитивну залежність попиту від доходу, характерну для нормальних товарів: зі зростанням доходу обсяг споживання зростає пропорційно.

Побудуємо графік попиту залежно від ціни, використовуючи модель $x_1^* = 0,5 \frac{18000}{p_1}$.

Залежність попиту від ціни має обернений характер: зі зростанням ціни попит зменшується, що відповідає закону попиту.

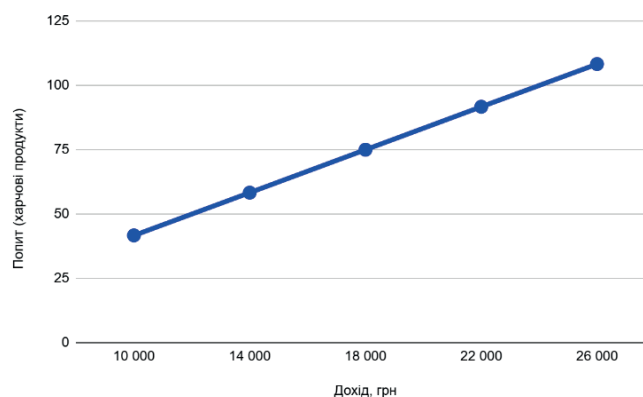


Рис. 1. Залежність попиту на товари першої необхідності від доходу

На основі наведених розрахунків побудовано графічні залежності попиту від доходу та ціни (рис. 1–2).

Таким чином, модель дозволяє прогнозувати зміну попиту залежно від доходу споживача, що є важливим інструментом фінансового планування.

Крім того, такі моделі можуть використовуватися для прогнозування виручки підприємств.

Важливим аспектом є також аналіз чутливості попиту до зміни цін. Використання похідних функцій попиту дозволяє оцінити еластичність попиту та передбачити наслідки зміни цінової політики підприємства. В свою чергу, в більшості розглянутих моделей виконується умова $\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i} < 0$, що означає зменшення попиту при зростанні ціни.

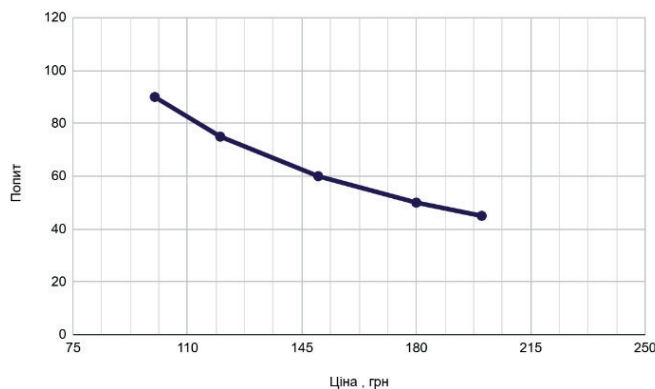


Рис. 2. Залежність попиту від ціни

Сучасні підходи до прогнозування попиту базуються на поєднанні економічних моделей та статистичних методів [14].

Отримані результати можуть бути застосовані не лише на рівні окремого підприємства, але й у макроекономічному аналізі, зокрема для прогнозування структури споживчих витрат населення, оцінки впливу інфляційних процесів та формування економічної політики держави.

Висновки. У роботі узагальнено та систематизовано підходи до моделювання споживчого вибору на основі функцій корисності та досліджено їх застосування для формування функцій попиту в умовах бюджетних обмежень.

На відміну від попередніх досліджень авторів [1; 3], у даній роботі:

- розширено клас досліджуваних функцій корисності (зокрема, модифіковані моделі Стоуна);
- отримано аналітичні умови, за яких товари можуть бути нормальними, неякісними або товарами Гіффена;
- запропоновано підхід до інтерпретації функцій попиту в контексті фінансового прогнозування поведінки споживача.

Наукова новизна полягає у поєднанні класичних моделей споживчого вибору з елементами фінансового прогнозування, що дозволяє оцінювати зміну попиту залежно від доходу та структури цін у прикладному контексті.

Практичне значення результатів полягає у можливості використання отриманих моделей для прогнозування споживчого попиту на реальних ринках, зокрема у сфері роздрібної торгівлі.

Перспективи подальших досліджень пов'язані з:

- емпіричною верифікацією моделей на реальних даних підприємств;
- інтеграцією поведінкових факторів у функції корисності;
- застосуванням економетричних методів для оцінювання параметрів моделей.

Література:

1. Зінкевич, Т.О., Лісовська, В.П., Стасюк, В.Д. (2018). *Дослідження деяких моделей споживчого вибору*: зб. наук. праць «Моделювання та інформаційні системи в економіці». К.:КНЕУ, 120-133.
- Zinkevych, T.O., Lisovska, V.P. and Stasiuk, V.D. (2018). *Doslidzhennya deyakykh modeley spozhyvchoho vyboru*: zb. nauk. prats' «Modelyuvannya ta informatsiyni systemy v ekonomitsi» [Investigation of certain consumer choice models. Modelling and Information Systems in Economics: Collection of Scientific Papers]. Kyiv: KNEU, 120–133. [in Ukrainian].
2. Лісовська, В.П., Перестюк, М.О. (2009, 2012). *Вища математика*. Практикум: навч. посіб.: у 2-х ч. - ч.І.К.: КНЕУ, 720; ч.ІІ. К.:КНЕУ, 443.



- Lisovska, V.P., Perestiuk, M.O. (2009, 2012). *Vyshcha matematyka* [Advanced Mathematics]. Practicum: course book: in 2 parts – part 1. K.: KNEU, 720; part 2. K.: KNEU, 443. [in Ukrainian].
3. Лісовська, В. П., & Стасюк, В. Д. (2017). Дослідження однієї моделі раціональної поведінки споживача на ринку. *Вісник Приазовського Державного Технічного Університету. Серія: Економічні науки*, 34, 118–126. <https://doi.org/10.31498/2225-6725.34.2017.128917>
- Lisovska, V.P. and Stasiuk, V.D. (2017). Doslidzhennya odniyeyi modeli ratsional'noyi povedinky spozhyvacha na rynku [The study of one model of rational consumer behaviour on the market]. *Visnyk Pryazovs'koho Derzhavnoho Tekhnichnoho Universytetu. Seriya: Ekonomichni nauky* [Bulletin of the Azov State Technical University. Series: Economic Sciences], 34, 118–126. <https://doi.org/10.31498/2225-6725.34.2017.128917>
4. Пономаренко, О.І., Перестюк, М.О., Бурим, В.М. (2004). *Сучасний економічний аналіз: у 2-х ч. - ч.І. Мікро-економіка*: Навч. посіб. К.: Вища шк., 262.
- Ponomarenko, O.I., Perestiuk, M.O., Buryim, V.M. (2004). *Suchasnyy ekonomichnyy analiz: u 2-kh ch.- ch.I. Mikroekonomika*: Navch. posib. [Modern economic analysis: In 2 parts. – Part 1. Microeconomics: Course book]. K.: Vyshcha shkola, 262. [in Ukrainian].
5. Пономаренко, О.І., Перестюк, М.О., Бурим, В.М. (1995). *Основи математичної економіки*. К.: Інформ-техніка, 320.
- Ponomarenko, O.I., Perestiuk, M.O., Buryim, V.M. (1995). *Osnovy matematychnoyi ekonomiky* [Fundamentals of mathematical economics]. K.: Informtekhnik, 320. [in Ukrainian].
6. Varian, H.R. (2019). *Intermediate Microeconomics: A Modern Approach*. 9th ed. New York: W.W. Norton & Company.
7. Mas-Colell, A., Whinston, M.D., Green, J.R. (1995). *Microeconomic Theory*. New York: Oxford University Press. [in English].
8. Deaton, A., Muellbauer, J. (1980). *Economics and Consumer Behavior*. Cambridge: Cambridge University Press, 467.
9. Blundell, R., Browning, M., Meghir, C. (1994). Consumer demand and the life-cycle allocation of household expenditures. *Review of Economic Studies*, 61(1), 57–80. <https://doi.org/10.2307/2297993> [in English].
10. Banks, J., Blundell, R., Lewbel, A. (1997). Quadratic Engel curves and consumer demand. *Review of Economics and Statistics*, 79(4), 527–539. <https://doi.org/10.1162/003465397557015> [in English].
11. Attanasio, O.P., Weber, G. (2010). Consumption and saving: Models of intertemporal allocation and their implications for public policy. *Handbook of Labor Economics*, 4, 693–751. [https://doi.org/10.1016/S1573-4463\(10\)04003-0](https://doi.org/10.1016/S1573-4463(10)04003-0)
12. DellaVigna, S. (2018). Structural behavioral economics. In: *Handbook of Behavioral Economics*, Vol. 1A, 613–723. <https://doi.org/10.1016/bs.hesbe.2018.07.002>
13. Varian, H.R. (2014). Big data: New tricks for econometrics. *Journal of Economic Perspectives*, 28(2), 3–28. <https://doi.org/10.1257/jep.28.2.3> [in English].
14. Hyndman, R.J., Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice*. 3rd ed. Melbourne: OTexts. <<https://otexts.com/fpp3/>>. (2026, March, 21).